Л. ГЪРНЕВСКА, Р. ПЕТРОВА, Й. ПАНЕВА-КОНОВСКА

КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА. ФУНКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

СОФИЯ – 2012 г.

Личка Василева Гърневска, автор

Радка Иванова Петрова, автор

Йорданка Добрева Панева-Коновска, автор

КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА.
ФУНКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

Предпечатна подготовка – авторите

Рецензент: Виржиния Стойнева Кирякова, проф. д.м.н.

Ангард Прима

ISBN 978-619-160-057-1

София – 2012 г.

АНОТАЦИЯ

Л. ГЪРНЕВСКА, Р. ПЕТРОВА, Й. ПАНЕВА-КОНОВСКА

КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА.
ФУНКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

Учебникът-сборник е съобразен с програмата (лекции и семинарни занятия) за обучение на студентите - бакалавърска степен, както и с тази на студентите от факултета по приложна математика, в Техническия университет – София. Той може да се използва и от студентите в други технически университети.

Учебникът се състои от две глави. Първата от тях съдържа четири параграфа, а втората – дванадесет. В края е дадена кратка справка за живота и математическия принос на редица видни учени, имената на които се срещат в тази книга. След всеки параграф са предложени достатъчен брой задачи за самостоятелна работа на студентите. Преди това са решени някои основни типове задачи. Има и указания за по-трудните задачи.

Номерацията на формулите и теоремите се въвежда отделно за всеки параграф. Чертежите имат двойна номерация – първият номер означава главата, а вторият е поредният номер в съответната глава.

Настоящият учебник е подготвен в рамките на работната програма по **Договор ДИД 02/25/ 2009** на тема „Интегрално-трансформационни методи, специални функции и приложения” с Фонд „Научни изследвания” при Министерството на образованието, младежта и науката на Р. България.

“Има още една причина за дълбокото уважение, което изпитваме към математиката: тя самата дава на природните науки оная сигурност, която без математиката е непостижима”.

Алберт Айнщайн

“И така аз обичам да водя диалог с великите умове на човечеството и обичам да развивам подобни вкусове и у студентите. Смятам, че е съвършено необходимо студентите да се възхищават от някого, а тъй като те обикновено не могат да се възхищават от преподавателите си, защото преподавателите ги изпитват или просто са несимпатични субекти, е нужно студентите да се възхищават от великите умове на човечеството, и затова преподавателите трябва да представят на студентите идеите на великите”.

Раймон Арон
"Le Spectateur engagè"
(Julliard, 1981, p. 302)

Който иска да направи нещо, намира средства, който не иска да направи нищо, намира причини.

Арабска мъдрост

Ако помислиш два пъти, преди да кажеш веднъж, ще го кажеш два пъти по-добре.

Т. Пейн

Невъзможното днес ще стане възможно утре.

К. Циолковски

Използвани означения

$\wedge$ – и
$\vee$ – или

$\mathbb{N}$ – множеството на естествените числа $=\{1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}$ – множеството на целите числа $=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$

$\mathbb{R}$ – множеството на реалните числа

$\mathbb{C}$ – множеството на комплексните числа

$\forall$ – всяко

$\subset$ – се съдържа ($A \subset B$ – A се съдържа в B; A е подмножество на B)

$\cap$ – сечение ($A \cap B = \{z : z \in A \wedge z \in B\}$ – сечение на A и B)
$\cup$ – обединение ($A \cup B = \{z : z \in A \vee z \in B\}$ –обединение на A и B)
$\setminus$ – разлика ($A \setminus B = \{z : z \in A \wedge z \notin B\}$ – разлика на A и B)

$\in$ **(**$\notin, \overline{\in}$**)** – принадлежи (не принадлежи)

$\exists$ **(**$\nexists, \overline{\exists}$**)** – съществува (не съществува)

Съдържание

ГЛАВА 1
КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА

§1. Исторически бележки

Комплексните числа навлизат в математиката през шестнадесети век като корени на квадратно уравнение с отрицателна дискриминанта.

В първата половина на шестнадесети век за решението на уравнение от трета степен от вида

$$x^3 + px + q = 0$$

е намерена формулата

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

наречена *формула на Кардано*[1] .

По тази формула например корените на уравнението $x^3 - 6x + 4 = 0$ се намират така:

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}.$$

Вижда се обаче, че уравнението може да се представи по следния начин: $(x-2)(x^2 + 2x - 2) = 0$, откъдето корените му са $x_1 = 2$ и $x_{2,\,3} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Следователно, за да се получат реалните корени на това уравнение по формулата на Кардано, трябва да може да се извлича квадратен корен от отрицателно число, т.е. трябва да може да се извършва операция, невъзможна в областта на реалните числа.

Това налага още в шестнадесети век да се реши проблемът за квадратните корени от отрицателни числа. В началото такива корени се отхвърлят като "невъзможни", "въображаеми", "имагинерни", "мними" и тяхното появяване се смята за признак на

---

[1] G. Cardano (24.09.1501-21.09.1575) – италиански математик, философ и лекар.

липса на решение на задачата, довела до квадратното уравнение. Обаче по-късно се установява, че макар и имагинерните корени да не изразяват величини, тъй като те не могат да се сравняват един с друг (не може да се каже кое мнимо число е по-голямо и кое по-малко), с тях могат да се извършват четирите алгебрични действия, при което се запазват свойствата, присъщи на действията с реалните числа. Това дава основание те да бъдат наречени имагинерни числа ("Алгебра" на Р. Бомбели[2], 1572). Геометричното изобразяване на комплексните числа с точки и вектори в равнината е въведено през 1799 г. от датския землемер К. Весел[3] и малко по-късно (1806 г.) от френския математик Д. Арган[4]. Символът i за имагинерната единица е въведен през 1777 г. от Л. Ойлер[5]. Терминът "комплексно число" е въведен през 1881 г. от К. Вайерщрас[6]. Голямо значение за признаване изключителната важност на комплексните числа в математиката имат изследванията на Л. Ойлер и К. Гаус[7], а също така и теоремата на Даламбер[8], че всяко алгебрично уравнение от n-та степен с комплексни коефициенти има n комплексни корени. Преди доказването на тази теорема би могло да се очаква, че както квадратното уравнение довежда до въвеждането на комплексните числа, така и за решаването на уравнения от по-висока степен $n = 3, 4, \ldots$ трябва да се въвеждат все нови и нови числа.

Геометричното изобразяване на едно комплексно число като точка или вектор в равнината, естествено, довежда до мисълта да се направят по-нататъшни обобщения на понятието число. Обаче търсенето на числова система, зависеща от три единици: $1, i, j$,

---

[2] R. Bombelli (ок.1526-1572) – италиански математик и инженер.
[3] C. Wessel (08.06.1745-25.03.1818) – датски математик, по професия землемер.
[4] J. R. Argand (18.07.1768-13.08.1822) –швейцарски математик.
[5] L. Euler (15.04.1707-18.09.1783) – швейцарски математик, физик, механик и астроном.
[6] K. Th. W. Weierstrass (31.10.1815-19.02.1897) – немски математик.
[7] C. F. Gauss (30.04.1777-23.02.1855) – немски математик, астроном, физик и геодезист.
[8] J. L. D'Alembert (16.11.1717-29.10.1783) – френски математик, механик и философ.

която да се изобразява геометрично с помощта на точки или вектори в тримерното пространство, не се увенчава с успех - не е възможно да се измислят действията с новите "числа" така, че да се запазват обичайните им свойства. През 1843 г. английският математик У. Хамилтон[9] показва, че могат да се построят числови системи, зависещи от четири единици: $1, i, j, k$, ако се откажем от едно свойство – комутативния закон на умножението. Изобщо *хиперкомплексни* числа от ранг n се наричат "числата" от вида

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \ \dots \ + a_ne_n,$$

където $e_1, e_2, \dots, e_n$ са единици, а $a_1, a_2, \dots, a_n$ – реални числа, когато са въведени правилата на алгебричните действия с тези "числа". Обаче Вайерщрас показва, че при $n > 2$ не могат да се запазят всички свойства, присъщи на алгебричните действия с реалните и комплексните числа. Немският математик Ф. Фробениус[10] доказва, че даже да се откажем от комутативния закон на умножението, останалите свойства на алгебричните действия могат да бъдат запазени само за $n = 4$, а при $n \neq 1, 2, 4$, както и да се въвежда правилото за умножение, винаги може да се намери двойка различни от нула хиперкомплексни числа, произведението на които е нула. При $n = 4$ получената система от числа се нарича *система на кватернионите.* Аналогично се получава и системата от числа на Кели[11] при $n = 8$, но при нея трябва да се откажем не само от комутативността на умножението, но и от неговата асоциативност, заменяйки я с по-слабо изискване.

---

[9] W. R. Hamilton (04.08.1805-02.09.1865) – ирландски математик.
[10] F. G. L. Frobenius (26.10.1849-03.08.1917) – немски математик.
[11] A. Cayley (16.08.1821-26.01.1895) – английски математик.

§2. Комплексни числа и действия с тях. Геометрично представяне

Дефиниция 1. *Комплексно число* z се нарича наредената двойка реални числа a и b, т.е. $z=(a,b)$.

Реалното число a се нарича *реална част* на комплексното число z и се означава: $a=\mathrm{Re}\,z$, а реалното число b се нарича *имагинерна част* на z и се означава: $b=\mathrm{Im}\,z$. (Означенията Re и Im са съкращения на френските думи Réel (реален) и Imaginaire (имагинерен).)

Обикновено множеството на комплексните числа се означава с буквата $\mathbb{C}$.

Ако $b=0$, то комплексното число $(a,0)$ се отъждествява с реалното число a: $a=(a,0)$. Следователно множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа е подмножество на $\mathbb{C}$: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. В частност $0=(0,0)$ и $1=(1,0)$.

Дефиниция 2. Две комплексни числа $z_1=(a_1,\, b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ се наричат *равни,* ако са равни съответно техните реални и техните имагинерни части, т.е. когато $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

За комплексните числа се дефинират следните *действия*:

а) Събиране

Дефиниция 3. *Сума* z_1+z_2 на две комплексни числа $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ се нарича комплексното число z, дефинирано с равенството

$$z=z_1+z_2=(a_1+a_2,b_1+b_2).$$

Самото действие за намиране сумата на комплексните числа се нарича *събиране.*

Дефиницията на сума на две комплексни числа може да се обобщи за произволен брой събираеми. Нека са дадени n комплексни числа: $z_1 = (a_1,\ b_1)$; $z_2 = (a_2,\ b_2)$; ... ; $z_n = (a_n,\ b_n)$. *Сума* $z_1 + z_2 + ... + z_n$ на тези числа се нарича комплексното число

$$z = z_1 + z_2 + ... + z_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n, b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

Примери: 1) $z_1 + z_2 = (3, 8) + (1, -2) = (4, 6)$;

2) $z_1 + z_2 + z_3 = (-1, 3) + (2, 1) + (0, -2) = (1, 2)$.

б) Умножение

Дефиниция 4. *Произведение* $z_1 z_2$ на двете комплексни числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ се нарича комплексното число z, дефинирано с равенството

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Действието за намиране на произведението на две комплексни числа се нарича *умножение* на комплексните числа.

Дефиницията на произведение на две комплексни числа може да се обобщи за случая на n комплексни числа $(n > 2)$. Нека например са дадени три комплексни числа: $z_1 = (a_1, b_1)$; $z_2 = (a_2, b_2)$ и $z_3 = (a_3, b_3)$. *Произведение* на тези три комплексни числа се нарича комплексното число z дефинирано с равенството:

$$z = z_1 z_2 z_3 = (z_1 z_2) z_3.$$

Дефиниция 5. Произведението на n равни комплексни числа $(n \in \mathbb{N})$ се нарича n*–та степен* на комплексното число и се означава със символа z^n, т.е.

$$z^n = \underbrace{z.z.\ ...\ .z}_{n \text{ пъти}}\ .$$

Лесно се проверява, че за всяко комплексно число z са верни следните съотношения:

$$z+0=z;\ z.0=0;\ z.1=z\,.$$

Примери:

3) $z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2},-4\right).(2,6)=(1+24,3-8)=(25,-5)$;

4) $z_1 z_2 z_3 = (1,2).(-2,-1).(3,4) = (-2+2,-1-4).(3,4) =$
$= (0,-5).(3,4) = (0+20,0-15) = (20,-15)$.

Като се използват дадените по-горе дефиниции, се вижда, че са в сила следните *закони* за събиране и умножение на комплексни числа:

1) *Комутативен закон на събирането*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

2) *Асоциативен закон на събирането*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

3) *Комутативен закон на умножението*

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

4) *Асоциативен закон на умножението*

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = z_1 z_2 z_3$$

5) *Дистрибутивен закон на събирането и умножението*

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3\,.$$

Ще докажем например дистрибутивния закон. Останалите се доказват аналогично. Наистина

$$\left(z_1 + z_2\right) z_3 = \left(a_1 + a_2,\, b_1 + b_2\right)\left(a_3, b_3\right) =$$
$$= \left(\left(a_1 + a_2\right) a_3 - \left(b_1 + b_2\right) b_3,\ \left(a_1 + a_2\right) b_3 + \left(b_1 + b_2\right) a_3\right) =$$
$$= ((a_1 a_3 - b_1 b_3) + (a_2 a_3 - b_2 b_3),\ (a_1 b_3 + b_1 a_3) + (a_2 b_3 + b_2 a_3)) =$$

$$= (a_1a_3 - b_1b_3,\, a_1b_3 + b_1a_3) + (a_2a_3 - b_2b_3,\, a_2b_3 + b_2a_3) =$$
$$= (a_1,b_1)(a_3,b_3) + (a_2,b_2)(a_3,b_3) = z_1z_3 + z_2z_3.$$

И така за комплексните числа са в сила същите основни закони, както и за реалните числа, освен аксиомата на Архимед[12] за наредбата.

Аксиома на Архимед. За всеки две положителни реални числа a и b съществува такова естествено число n, за което е изпълнено неравенството $an > b$.

Аналогично свойство има всяка измерима величина, напр. отсечка, лице, обем и т.н. Но съществуват и системи от величини, за които аксиомата на Архимед не се изпълнява. Такива величини се наричат *неархимедови*.

в) Изваждане.

Дефиниция 6. *Разлика* на комплексните числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ се нарича такова комплексно число z, за което $z + z_2 = z_1$; означава се със символа

$$z = z_1 - z_2.$$

Намирането на разликата $z_1 - z_2$ на комплексните числа z_1 и z_2 се нарича *изваждане* на тези две числа.

Както се вижда от дефиниция 6, изваждането на комплексните числа z_1 и z_2 е операция, обратна на събирането.

---

[12] Архимед (ок. 287-212 пр.н.е.) - древногръцки математик, физик и механик.

Теорема 1. За всеки две комплексни числа z_1 и z_2 съществува единствено комплексно число z, което е тяхна разлика: $z = z_1 - z_2$.

Доказателство: Нека $z_1 = (a_1, b_1)$, а $z_2 = (a_2, b_2)$. Допускаме, че разликата $z_1 - z_2$ съществува и е равна на $z = (x, y)$. Тогава от дефиниция 6 следва: $z + z_2 = z_1$, т.е. $(x + a_2,\ y + b_2) = (a_1, b_1)$ (дефиниция 3). От последното равенство и дефиниция 2 се получава системата:

$$\left| \begin{array}{l} x + a_2 = a_1 \\ y + b_2 = b_1 \end{array} \right. .$$

Тази система има единствено решение

(1)
$$\left| \begin{array}{l} x = a_1 - a_2 \\ y = b_1 - b_2 \end{array} \right. .$$

Следователно, ако разликата $z = z_1 - z_2$ съществува, то тя е единствена и се намира с помощта на равенствата (1), т.е.

(2)
$$z = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2).$$

За да се докаже, че разликата $z = z_1 - z_2$ наистина съществува, достатъчно е равенството $z + z_2 = z_1$ от дефиниция 6 да се обръща в тъждество след заместването в него на z от (2).

Наистина,

$$z + z_2 = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2) + (a_2, b_2) = (a_1, b_1) = z_1,$$

с което теорема 1 е доказана.

Пример 5. **а)** $(4,-2) - (3,-1) = (1,-1)$;

б) $(5,-8) + (3,7) - (-2,0) =$
$= (8,-1) - (-2,0) = (10,-1)$.

г) Деление

Дефиниция 7. Да се раздели комплексното число $z_1=(a_1,b_1)$ на комплексното число $z_2=(a_2,b_2)\neq 0$ означава да се намери такова комплексно число z, че $zz_2=z_1$.

Числото z се нарича *частно* на комплексните числа z_1 и z_2 и се означава: $z=\dfrac{z_1}{z_2}$. Самото действие за намиране на частното се нарича *деление* на комплексните числа z_1 и z_2.

Теорема 2. За всеки две комплексни числа z_1 и z_2 съществува единствено комплексно число z, което е частно от делението на z_1 с z_2 при условие, че $z_2\neq 0$.

Доказателство: Нека $z_1=(a_1,b_1)$; $z_2=(a_2,b_2)$ и $z_2\neq 0$. Да предположим, че частното z от делението на z_1 с z_2 съществува и $z=(x,y)$. Тогава от дефиниция 7 се получава

$$(x,y)(a_2,b_2)=(a_1,b_1).$$

След прилагане на правилото за умножение на две комплексни числа (дефиниция 4), се получава

$$(a_2x-b_2y,b_2x+a_2y)=(a_1,b_1).$$

От дефиниция 2 (за равенство на две комплексни числа) се получава системата

$$\left|\begin{array}{l} a_2x-b_2y=a_1 \\ b_2x+a_2y=b_1 \end{array}\right. .$$

Решението на тази система по отношение на x и y, е

(3) $$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}\ ,\ y=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}\ .$$

Решението (3) съществува, тъй като от условието $z_2 \neq 0$ следва, че $a_2^2 + b_2^2 > 0$. Освен това решението (3) е единствено.

Следователно, ако частното z съществува, то е единствено и според (3) има вида:

$$z = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \ , \ \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

Остава да се докаже, че частното наистина съществува. За целта е достатъчно да се замести полученото комплексно число z в произведението zz_2 и да се провери, че се получава z_1 (дефиниция 7).

Наистина

$$zz_2 = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \ , \ \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).(a_2, b_2) =$$

$$= \left(\frac{a_1 a_2^2 + a_2 b_1 b_2 - a_2 b_1 b_2 + a_1 b_2^2}{a_2^2 + b_2^2}, \ \frac{a_1 a_2 b_2 + b_1 b_2^2 + a_2^2 b_1 - a_1 a_2 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{a_1 (a_2^2 + b_2^2)}{a_2^2 + b_2^2} \ , \ \frac{b_1 (b_2^2 + a_2^2)}{a_2^2 + b_2^2} \right) = (a_1, b_1) = z_1 .$$

С това доказателството на теорема 2 е завършено.

От самата дефиниция на комплексното число $z = (a, b)$ като наредена двойка реални числа (дефиниция 1) следва и естествената геометрична интерпретация на това число като точка в равнината с декартови[13] координати $x = a$ и $y = b$. При това на реалното число $z = (a, 0) = a$ съответства точка, разположена на абсцисната ос

[13] R. Descartes (31.03.1596-11.02.1650) – френски философ, математик, физик, физиолог.

Ox. На $z = 0 = (0,0)$ съответства координатното начало – точката $O(0,0)$.

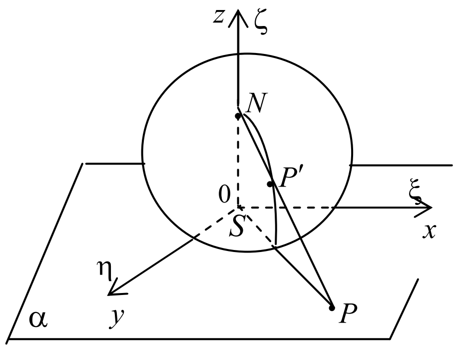
Комплексно число от вида $z = (0,b)$ се нарича *чисто имагинерно* и се изобразява с точка от ординатната ос Oy. Ето защо абсцисната ос се нарича още и *реална ос*, а ординатната - *имагинерна ос*.

В сила е и обратното съответствие – на точка от равнината с декартови координати $x = a$ и $y = b$ съответства комплексното число $z = (a,b)$.

По такъв начин между множеството $\mathbb{C}$ на комплексните числа и точките от равнината съществува взаимно еднозначно съответствие (биекция).

Равнината, точките на която представят геометрично комплексните числа, се нарича *комплексна* или *Гаусова равнина*: Z. Ако към точките на тази равнина се прибави и $z = \infty$, се получава *разширената комплексна (Гаусова) равнина*: $\overline{Z}$.

Забележка. В теорията на функциите се приема, че Гаусовата равнина има само една безкрайно отдалечена точка (а не безброй много такива, както е прието в проективната геометрия). Това можем да си изясним нагледно, като си послужим със стереографската проекция, посредством която сферичната повърхнина се изобразява върху равнина. За тази цел върху Гаусовата равнина (α) (която е в хоризонтално положение) се "поставя" сфера така, че да се допира до равнината с южния си полюс S и то в точката $z = 0$ (черт. 1.1). Ако северният полюс N и произволна точка P от равнината (α) се съединят с права линия, то правата PN пресича сферата в още една точка P'. Точката P се нарича *стереографска проекция* на P'. По този начин на всяка точка P от равнината (α) отговаря определена точка P' от сферата, чиято стереографска проекция е P; следователно и точките на сферата могат да служат за геометрично представяне на комплексните числа. Обратно, на всяка точка P' от сферата отговаря нейният стереографски образ P от равнината (α); изключение прави само случаят, в който P' се слива с проекционния център N (северния полюс). Тази точка N може да послужи като геометричен образ на безкрайно отдалечената точка на равнината (α). И наистина, когато P се отдалечава в равнината (α), така че разстоянието OP да расте неограничено, е ясно, че P' клони към N върху сферата. При това, ако в равнината (α) се опише окръжност L с център началото O, то върху сферата ѝ отговаря пак окръжност L', която разделя сферичната повърхнина на две части по такъв начин, че на точките от равнината, които лежат вън от L, отговаря онази част от сферата, която съдържа N.



Черт. 1.1

§3. Алгебричен вид на комплексните числа

Дефиниция 1. Комплексното число $(0,1)$ се нарича *имагинерна единица* и се означава със символа i, т.е. $i=(0,1)$.

Лесно се проверява, че е в сила равенството $i^2=-1$. Наистина $i^2=(0,1).(0,1)=(0-1,0+0)=-1$.

Чисто имагинерното число $(0,b)$ може да се разглежда като произведение на реалното число $(b,0)$ и имагинерната единица, т.е. $bi=(b,0).(0,1)=(0,b)$ (дефиниция 4, § 2).

Както беше вече отбелязано, числото $(0,b)=bi$ се нарича чисто имагинерно число и се изобразява като точка от имагинерната ос (Oy).

Като се използва казаното по-горе се получава:

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+ib\,.$$

По такъв начин всяко комплексно число $z=(a,b)$ може да се запише във вида

$$z=a+ib\,.$$

Дясната страна на това равенство се нарича *алгебричен вид* на комплексното число $z=(a,b)$.

Нека са дадени комплексните числа $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$. Тогава сумата, разликата и произведението им в алгебричен вид се записват по следния начин:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$

$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$$

$$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)\,.$$

Оттук следва, че тези действия могат да се извършват по обичайните правила на алгебрата, т.е. като действия с двучлени, отчитайки, че $i^2=-1$.

Ако се умножават повече от две комплексни числа в алгебричен вид, то те се умножават като полиноми относно i, като в резултата се заместят различните степени на i с техните равни, а именно: $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$ и т.н. Въобще за $\forall k\in\mathbb{N}$ имаме:

$$i^{4k}=\left(i^4\right)^k=1^k=1\,,\qquad i^{4k+1}=i^{4k}.i=1.i=i\,,$$

$$i^{4k+2}=i^{4k}.i^2=1.(-1)=-1\,,$$

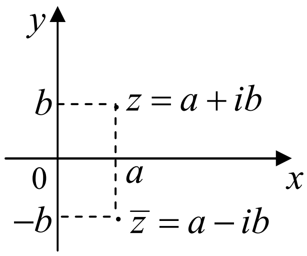
$$i^{4k+3}=i^{4k}.i^3=1.(-i)=-i\,.$$

Пример 1. $(2-3i)(4+i)(-1-i)=$

$$=(8-10i-3i^2)(-1-i)=-8+2i+13i^2+3i^3=$$
$$=-8+2i-13-3i=-21-i\,.$$

Дефиниция 2. Две комплексни числа $a+ib$ и $a-ib$, които имат еднакви реални и противоположни имагинерни части, се наричат *спрегнати* комплексни числа и се означават: $z=a+ib$ и $\bar{z}=a-ib$.

Всяко реално число съвпада със спрегнатото си. Комплексно спрегнатите числа се изобразяват геометрично с точки, симетрично разположени относно реалната ос Ox (черт. 1.2).



Черт. 1.2

За комплексно спрегнатите числа са в сила равенствата:

$z+\bar{z}=2a$, $\quad z-\bar{z}=2bi$,

$z\bar{z}=a^2+b^2$, $\quad \bar{\bar{z}}=z$,

$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\quad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$,

$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.

В алгебричен вид делението на комплексното число $z_1=a_1+ib_1$ с комплексното число $z_2=a_2+ib_2\neq 0$ се извършва чрез умножение на делимото и делителя с число, което е спрегнато на делителя, т.е. по следния начин:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}.\frac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2{}^2+b_2{}^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2{}^2+b_2{}^2}\,.$$

В сила е равенството: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Пример 2. $\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{2-i}{1+i}\,\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{2-3i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\,.$

Задачи

I. Да се извършат посочените действия с комплексни числа в алгебричен вид:

1) $(1+i)^4$.

Решение: *I начин*: Използва се биномът на Нютон[14)]

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^{n-k}b^k\,,$$

където

$$\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\qquad n!=1.2.\ \dots\ .n\ ,\ n\in\mathbb{N}\,;\ 0!=1\,.$$

Тогава

$$\begin{aligned}(1+i)^4&=1+\binom{4}{1}i+\binom{4}{2}i^2+\binom{4}{3}i^3+i^4=\\&=1+\frac{4!}{1!\ 3!}i+\frac{4!}{2!\ 2!}(-1)+\frac{4!}{3!\ 1!}(-i)+1=\\&=2+4i-6-4i=-4.\end{aligned}$$

---

[14] I. Newton (04.01.1643-31.03.1727) – английски физик, механик, астроном и математик.

II начин: $(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (1+2i-1)^2 = -4$.

2) $(1+2i)^6$ **отг.** $117+44i$

3) $(3+4i)+(-2+i)$ **отг.** $1+5i$

4) $(5-6i)-(-3+i)$ **отг.** $8-7i$

5) $(2-3i)(4+i)$ **отг.** $11-10i$

6) $\dfrac{14-21i}{2+3i} : \dfrac{1+i}{1-i}$ **отг.** $\dfrac{7}{13}(-12+5i)$

7) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ **отг.** 2

8) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{48}$ **отг.** 1

9) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, $n \in \mathbb{N}$ **отг.** $2i^{n-1}$

10) $\dfrac{1-3i}{1+3i} - \dfrac{1+3i}{1-3i}$ **отг.** $-1,2i$

11) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ **отг.** $\dfrac{44-5i}{318}$

12) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$ **отг.** $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$

13) $(a+b)(a+bz)(a+bz^2)$**,** ако $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **отг.** a^3+b^3

14) $(1+i\sqrt{3})^3$ **отг.** -8

15) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$ **отг.** i

16) $\left(\dfrac{i^{45}+2}{i^{19}+1}\right)^2$ **отг.** $-2+\dfrac{3}{2}i$

17) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$, $n\in\mathbb{N}$ **отг.** 0

18) $i.i^2.\dots.i^{99}.i^{100}$ **отг.** -1

19) $i^{-21}-i^{-31}-i^{-41}$ **отг.** $-i$

20) Да се докаже, че $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$ за всяко $x\in\mathbb{R}$.

II. Като се използва дефиницията за равенство на две комплексни числа, да се решат примерите:

1) Да се определят реалните числа x и y, за които:

а) $(5-8i)x+(7+3i)y=2-i$ **отг.** $x=\dfrac{13}{71},\ y=\dfrac{11}{71}$

б) $\dfrac{x-4+i(y-1)}{1+i}=2-5i$ **отг.** $x=11,\ y=-2$

в) $(4+2i)x+(5-3i)y=13+i$ **отг.** $x=2,\ y=1$

г) $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{2+i}{1+i}=\sqrt{2},\ z=x+iy$ **отг.** $x=-\dfrac{1}{3},\ y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

д) $(3x-i)(2+i)+(x-yi)(1+2i)=5+6i$

отг. $x=\dfrac{20}{17},\ y=-\dfrac{36}{17}$

2) Да се пресметне $\sqrt{-8+6i}$.

Решение: Нека x и $y\in\mathbb{R}$. Полагаме $\sqrt{-8+6i}=x+iy$. Повдигаме двете страни на квадрат и приравняваме реалните и имагинерните части от двете страни на полученото равенство:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{array} \right. .$$

Търсим решението на тази система, като $y = \dfrac{3}{x}$ от второто уравнение заместваме в първото:

$$\left| \begin{array}{l} y = \dfrac{3}{x} \\ x^4 + 8x^2 - 9 = 0 \end{array} \right. .$$

Полагаме във второто уравнение на тази система $u = x^2 > 0$ и стигаме до квадратното уравнение: $u^2 + 8u - 9 = 0$, корените на което са $u_1 = 1$ и $u_2 = -9$. Но $u_2 = -9$ не е решение на задачата ($u > 0$). От $u_1 = x^2 = 1$ получаваме $x_{1,2} = \pm 1$, а $y = \pm 3$.

Следователно $\sqrt{-8 + 6i} = \pm(1 + 3i)$.

3) $\sqrt{3 - 4i}$ **отг.** $\pm(2 - i)$

4) $\sqrt{2i}$ **отг.** $\pm(1 + i)$

5) $\sqrt{-8i}$ **отг.** $\pm 2(1 - i)$

6) $\sqrt{-15 + 8i}$ **отг.** $\pm(1 + 4i)$

7) $\sqrt{-11 + 60i}$ **отг.** $\pm(5 + 6i)$

8) $\sqrt{4 + i} + \sqrt{4 - i}$ **отг.** $\pm\sqrt{8 + 2\sqrt{17}}$

9) $\sqrt[4]{-1}$ **отг.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$

10) $\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}$ **отг**. $i^k\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$

(***Упътване*:** Да се използва формулата

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\ .)$$

11) Да се решат уравненията:

а) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$ **отг.** $z_1 = 3 - i,\ z_2 = -1 + 2i$

б) $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$

отг. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = \frac{4-2i}{5}$

в) $z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0$ **отг.** $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 1 - 3i$

г) $z^4 + (3-2i)z^2 + 8 + 6i = 0$

отг. $z_{1,2} = \pm(1-i),\ z_{3,4} = \pm(1+2i)$

д) $z^4 - 3z^2 + 4 = 0$ **отг.** $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{7} \pm i\right)$

е) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$ **отг.** $\pm(4 \pm i)$

12) Да се решат системите ($x, y, z \in \mathbb{C}$):

а) $\left| \begin{array}{l} (3-i)x + (4+2i)y = 2 + 6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5 + 4i \end{array} \right.$ **отг.** $x = 1 + i,\ y = i$

б) $\left| \begin{array}{l} (2+i)x + (2-i)y = 6 \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8 \end{array} \right.$ **отг.** $x = 2 + i,\ y = 2 - i$

в) $\left| \begin{array}{l} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30 \end{array} \right.$

отг. $x = 3 - 11i,\ y = -3 - 9i,\ z = 1 - 7i$

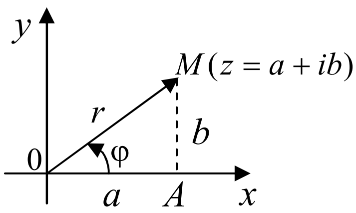
г) $\begin{cases} (1+i)x-(1-i)y-iz=0 \\ (2-i)x+2iy-(1+2i)z=3-2i \\ 3ix-\frac{1}{i}y+\frac{1-i}{1+i}z=-1-i \end{cases}$

отг. $x=i,\ y=1,\ z=2+2i$

§4. Тригонометричен вид на комплексните числа

В § 2 беше отбелязано, че комплексното число $z=a+ib$ се изобразява геометрично с точка $M(a,b)$ в равнината. Освен с точка, комплексното число се изобразява геометрично и с вектор ($\overrightarrow{OM}$) с начало в точката $O(0,0)$ и край – в точката M, изобразяваща съответното комплексно число. Векторът $\overrightarrow{OM}$ се нарича *радиус вектор* на комплексното число (черт. 1.3).

Този начин на изобразяване на комплексното число с вектор по естествен начин води до така наречения тригонометричен вид на комплексното число.



Черт. 1.3

Нека $z=a+ib\neq 0$ е произволно комплексно число. Да означим с r дължината на радиус вектора $\overrightarrow{OM}$, с който това число се изобразява геометрично ($|\overrightarrow{OM}|=r$), а с φ – ъгъла, който

$\vec{OM}$ сключва с положителната посока на оста Ox, като отчитането на φ става от реалната ос (Ox) към вектора $\vec{OM}$.

От черт. 1.3 се вижда (правоъгълния триъгълник OAM), че $a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$. Оттук $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Дясната страна на полученото равенство за z се нарича *тригонометричен вид* на комплексното число z. Дължината на радиус вектора $\vec{OM}$ – числото r, се нарича *модул* на комплексното число $z = a + ib$ и се означава с $r = |z| = \operatorname{mod} z$, а ъгълът φ се нарича аргумент на това комплексно число и се означава с $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

По Питагоровата теорема[15] (ΔOAM) е ясно, че модулът се определя еднозначно от формулата $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ако $z \neq 0$, то модулът е положително число. Модулът на $z = 0$ е нула. Обратното също е вярно – ако $|z| = 0$, то $z = 0$.

Поради периодичността на функциите $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, които имат основен период 2π, аргументът φ на комплексното число $z \neq 0$ има безброй много стойности. Именно, ако φ_0 е аргумент на комплексното число z, то и $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \ k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ \dots$, също е аргумент на това число.

Стойностите на аргумента φ, които се намират в границите $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \leq \pi$), се наричат *главни стойности* и се означават с $\varphi = \arg z$. Тогава всичките безброй много стойности на аргумента на комплексното число $z \neq 0$ се дават с формулата

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \ k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ \dots .$$

---

[15] С. Питагор (ок. 580-500 г. пр.н.е.) – древногръцки математик и философ-идеалист.

От черт. 1.3 се вижда, че $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$, откъдето

$$\varphi = \arg z = \mathrm{Arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + m\pi$$

($m = 0$ или $m = \pm 1$, ако $-\pi < \varphi \le \pi$; или $m = 0, 1, 2$, ако $0 \le \varphi < 2\pi$).

При определяне на аргумента на комплексното число z трябва да се съобразяваме с квадранта, в който лежи точката, изобразяваща z. Безсмислено е обаче да се говори за аргумент на $z = 0$.

Примери: Да се представят в тригонометричен вид комплексните числа:

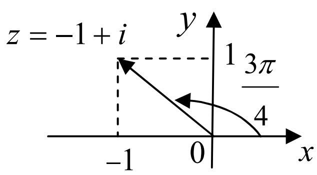
1) $z = -1 + i$ (черт. 1.4).

Имаме $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Следователно

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$



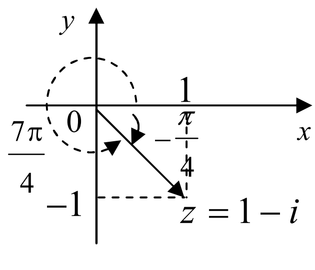
Черт. 1.4

2) $z = 1 - i$ (черт. 1.5).

Имаме: $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$

(или $\varphi = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$).



Черт. 1.5

Следователно

$$z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right], \text{ако } -\pi<\varphi\le\pi,$$

или

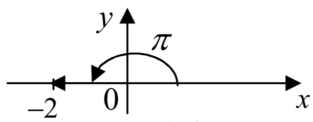
$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right), \text{ако } 0\le\varphi<2\pi.$$

3) $z=-2$ (черт. 1.6).

Имаме

$|z|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

(или $|z|=|-2|=2$) и



Черт. 1.6

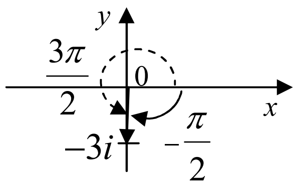
$\varphi=\pi$, което се вижда непосредствено от черт 1.6. Следователно $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

4) $z=-3i$ (черт. 1.7).

Имаме $|z|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$

и $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ (или $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$),

което се вижда непосредствено от черт 1.7. Следователно



Черт. 1.7

$$z=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right], \text{ако } -\pi<\varphi\le\pi,$$

или

$$z=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right), \text{ако } 0\le\varphi<2\pi.$$

Като се използва формулата на Ойлер, която ще бъде изведена по-нататък, а именно:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$ [16],

комплексното число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ може да се запише във вида

$$z = re^{i\varphi} = r\exp(i\varphi),$$

наречен *показателен (експоненциален)* вид на комплексното число.

Дефиниция 1. Две комплексни числа z_1 и z_2, представени в тригонометричен вид, са *равни*, ако техните модули са равни: $|z_1| = |z_2|$ и аргументите им са равни: $\arg z_1 = \arg z_2$, като тези аргументи са взети в един и същи интервал – или в $(-\pi, \pi]$, или в $[0, 2\pi)$.

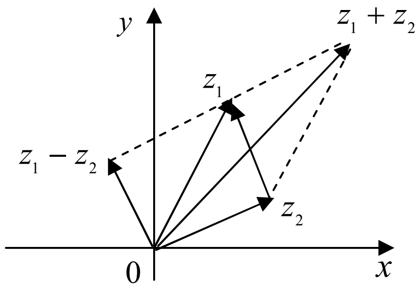
Ако $\bar{z}$ е спрегнатото на z число, то $|z| = |\bar{z}|$, а $\arg z = -\arg \bar{z}$ (последното равенство се вижда от черт. 1.2, като се начертаят векторите, изобразяващи двете комплексно спрегнати числа).

Отбелязахме, че комплексните числа не се сравняват непосредствено едно с друго, напр. не може да се пише: $3i > i$, $3 + i < 6 + 2i$ и т.н. Обаче комплексните числа могат да се сравняват по модул, напр. $|3i| > |i|$, тъй като $3 > 1$; $|3 + i| < |6 + 2i|$, тъй като $\sqrt{10} < \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, и т.н.

Ще отбележим също така, че геометрично събирането на две комплексни числа може да става по правилото на успоредника (черт. 1.8).

Геометричният смисъл на модула на разликата на две комплексни числа $|z_1 - z_2|$ е разстоянието между съответните им точки в комплексната равнина. Оттук става ясно, че множеството от

[16] Числото $e \approx 2,71828...$ се нарича *Неперово число*;
J. Napier (1550-04.04.1617) – шотландски математик.



Черт. 1.8

точки $z = x + iy$, равноотдалечени (на разстояние R) от дадена фиксирана точка $c = \alpha + i\beta$, е окръжност с уравнение

$$|z - c| = R.$$

Замествайки $|z - c|$ с аритметичния корен, чрез който се пресмята, получаваме:

$$|z - c| = |x + iy - (\alpha + i\beta)| = |x - \alpha + i(y - \beta)| =$$
$$= \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = R.$$

Повдигайки последното равенство от горната верига на квадрат, получаваме

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

което представлява каноничното уравнение на тази окръжност в декартови координати.

От съответните триъгълници на черт. 1.8 лесно се установяват неравенствата:

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ и } |z_1 \pm z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

или, записани обединено:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Равенствата тук са възможни тогава и само тогава, когато точките 0, z_1 и z_2 лежат на една права.

Тригонометричният, както и експоненциалният, вид на комплексните числа е удобен при извършване на действията умножение, деление, степенуване и коренуване с тези числа.

Теорема 1. Модулът на произведението на две или повече комплексни числа е равен на произведението на модулите на тези комплексни числа, а аргументът на произведението е равен на сумата от аргументите им.

Доказателство: Нека

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, а $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

По правилото за умножение на комплексни числа (§ 3) получаваме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \begin{bmatrix} (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ +i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) \end{bmatrix} =$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

По индукция може да се докаже, че теоремата е вярна за произволен брой множители.

Теорема 2. Модулът на частното на две комплексни числа е равен на частното от модулите на делимото и делителя, а аргументът на частното е равен на разликата от аргументите на делимото и делителя.

Доказателство: Нека

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, а $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$.

Тогава (§ 3): $\dfrac{z_1}{z_2} =$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}.\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}.\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}.\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right],$$

което искахме да докажем.

Теорема 3. За всяко естествено число n е в сила равенството:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Доказателство: Извършва се по индукция.

Ясно е, че при $n=1$ равенството е вярно. Може да се провери, че е вярно и при $n=2$.

Наистина съгласно теорема 1

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Нека то е вярно и при $n=k$, т.е.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi,$$

където k е произволно естествено число, по-голямо или равно на 3. Тогава от допускането и теорема 1 следва, че

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= \cos(k\varphi + \varphi) + i\sin(k\varphi + \varphi) = \cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi,$$

което и трябваше да се докаже.

Доказаното равенство се нарича *формула на Моавър*[17].

Дефиниция 2. Да се извлече n*–ти корен* ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$) от комплексното число z означава да се намери такова комплексно число w, че $w^n = z$.

Теорема 4. n–ят корен от произволно комплексно число z съществува и има n различни стойности. Ако подкоренният израз е нула, т.е. $z = 0$, то тези стойности съвпадат.

Доказателство: Нека да намерим n-ти корен ($n \geq 2$) от комплексното число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Да предположим, че n–ят корен от z съществува и е равен на $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Тогава по дефиниция

---

[17] A. de Moivre (26.05.1667-27.11.1754) – английски математик.

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тъй като равните комплексни числа имат равни модули, а аргументите им (не главните) се различават с кратно на 2π, то

$$\rho^n = r, \qquad \text{а} \qquad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

където $k \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \text{ а } \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

От казаното следва, че ако n–ят корен от z съществува, той може да се изчисли по формулата

(1) $$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

За да докажем, че n-ят корен от z съществува, повдигаме w_k на n–та степен. Като използваме формулата на Моавър, получаваме:

$$w_k{}^n = r\big(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\big) = r\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) = z$$

при k произволно цяло число.

Сега можем да направим следния извод: n-ят корен съществува и може да се пресметне по формула (1), в която на буквата k може да се дава произволна цяла стойност.

Ако $r = |z| = 0$, т.е. $z = 0$, то всички стойности на w_k съвпадат и са равни на нула. Ако пък $r \neq 0$, от периодичността на тригонометричните функции следва, че стойностите на n–я корен от z, изчислени по формула (1) при различни стойности на k, ще се повтарят.

За да докажем, че n–ят корен от комплексното число $z \neq 0$ има точно n различни стойности, ще покажем, че:

а) при $k = 0, 1, \dots, n-1$ се получават n различни стойности за w_k: $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$;

б) при произволно цяло k се получава отново някоя от стойностите $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$.

Наистина:

а) Да предположим, че $w_s = w_l$, където $0 \le s < l \le n-1$, т.е.

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2l\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2l\pi}{n}\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2s\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2s\pi}{n}\right).$$

Комплексните числа са равни, следователно, аргументите им или са равни, или се различават с кратно на 2π. Затова

$$\frac{\varphi+2l\pi}{n}=\frac{\varphi+2s\pi}{n}+2p\pi,\ p\in\mathbb{Z}.$$

Оттук имаме $\dfrac{l-s}{n}=p$. Това равенство е невъзможно, понеже $l-s$ е положително и по-малко от n, т.е. $\dfrac{l-s}{n}$ е дробно число, докато p е цяло. Следователно $w_s \ne w_l$ за $0 \le s < l \le n-1$.

б) Нека сега k е произволно цяло число. Разделяме k на n с остатък. Частното ще означим с q, а остатъка - с m. Имаме $k = nq + m$, $0 \le m \le n-1$. Ще покажем, че $w_k = w_m$:

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2(nq+m)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(nq+m)\pi}{n}\right]=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2m\pi}{n}+2q\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2m\pi}{n}+2q\pi\right)\right]=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2m\pi}{n}\right)=w_m.$$

По такъв начин стойността w_k съвпада със стойността w_m, където $0 \le m \le n-1$, т.е. с една от стойностите $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$.

С това теоремата е доказана.

Пример 5. Да се намери $w = \sqrt[4]{16i}$.

Записваме $16i$ в тригонометричен вид:

$$16i = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \text{ т.е. } r = 16,\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Тогава по формула (1) имаме

$$w_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right),\ k = 0 \div 3.$$

Следователно

$$w_k = 2\left(\cos\frac{\pi + 4k\pi}{8} + i\sin\frac{\pi + 4k\pi}{8}\right),\ k = 0 \div 3.$$

Геометрично стойностите на корен n–ти се изобразяват с точки, които представляват върхове на правилен n–ъгълник, вписан в окръжност с радиус $\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|}$ и център $z = 0$.

Особено важен е случаят за пресмятане на n–ти корен от числото 1. Всичките n стойности на този корен $n \ge 2,\ n \in \mathbb{N}$, се получават по формулата

(2) $$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \dots, n-1,$$

тъй като в тригонометричен вид $1 = \cos 0 + i\sin 0$.

В сила е следното твърдение:

Твърдение. Всичките стойности на n–ти корен от комплексното число z могат да се получат с умножение на една от неговите стойности с всичките n стойности на $\sqrt[n]{1}$, получени по формула (2).

Наистина нека z_1 да е една от стойностите на $\sqrt[n]{z}$, т.е. ${z_1}^n = z$, а ζ е произволна стойност на $\sqrt[n]{1}$, т.е. $\zeta^n = 1$. Тогава $(z_1\zeta)^n = {z_1}^n\zeta^n = z.1 = z$, т.е. $z_1\zeta$ е една от стойностите на $\sqrt[n]{z}$. Като се умножи z_1 с всяка от стойностите на $\sqrt[n]{1}$, се получават n различни стойности на $\sqrt[n]{z}$, т.е. всичките стойности на този корен.

Примери: 6) $\sqrt[3]{1} = \cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3},\ k = 0,\ 1,\ 2$.

При $k = 0,\ \zeta_1 = 1;\ k = 1,\ \zeta_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}; k = 2,\ \zeta_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\sqrt[3]{-8} = -2\sqrt[3]{1}$.

Тъй като $z_1 = -2$ е една от стойностите на $\sqrt[3]{-8}$, другите две стойности се получават след умножаване на $z_1 = -2$ с ζ_2 и ζ_3 от пример 6. Имаме: $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ и $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Задачи

I. Да се запишат в тригонометричен и експоненциален вид комплексните числа:

1) $z = 4$ **отг.** $z = 4(\cos 0 + i\sin 0) = 4e^{0i}$

2) $z = -4$ **отг.** $z = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4e^{\pi i}$

3) $z = 4i$ **отг.** $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$

4) $z = -4i$ **отг.** $z = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 4e^{\frac{3\pi}{2}i}$

или $z = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 4e^{-\frac{\pi}{2}i}$

5) $z = 1 + i$ **отг.** $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

6) $z = -1 - i$ **отг.** $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$

или $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\,e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

7) $z = 1 + i^{123}$ **отг.** $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$

или $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{\frac{7\pi}{4}i}$

8) $z = 1 + i\sqrt{3}$ **отг.** $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

9) $z = 1 - i\sqrt{3}$ **отг.** $z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

или $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$

10) $z = \sqrt{3} - i$ **отг.** $z = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}$

или $z = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right] = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

11) $z = -1 - i\sqrt{3}$

отг. $z = 2\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

или $z = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$

12) $z = 2 + i + \sqrt{3}$

отг. $z = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right) = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)e^{\frac{\pi}{12}i}$

(***Упътване***: Да се използват формулите: $\mathrm{tg}2\varphi = \dfrac{2\mathrm{tg}\varphi}{1 - \mathrm{tg}^2\varphi}$ и $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.)

13) $z = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha,\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

отг. $z = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\right] =$

$= 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)i}$

14) $z=\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

отг. $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{\alpha i}$

15) $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha,\ 0<\alpha\le 2\pi$

отг. $z=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right)=2\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}$

16) $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha,\ 0\le\alpha<2\pi$

отг. $z=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]=$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)i},\ 0\le\alpha<\frac{3\pi}{2};$$

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)i},\ \frac{3\pi}{2}\le\alpha<2\pi$$

II. Да се извършат означените действия с комплексни числа в тригонометричен (експоненциален) вид:

1) $w=\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{60}$ **отг.** $w=-2^{30}$

2) $w=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$ **отг.** $w=-2^{19}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

3) $w=\left(\dfrac{\sqrt{3}+5i}{4+2\sqrt{3}i}\right)^{66}$ **отг.** $w=-1$

(***Упътване*****:** Делението да се извърши в алгебричен вид, след което полученото частно да се приведе в тригонометричен вид. Да се приложи формулата на Моавър.)

4) $w=\left(\sqrt{3}-3i\right)^{6}$ **отг.** $w=1728$

5) $w=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{36}$ **отг.** $w=1$

6) $w=\left(1+i\right)^{8}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$ **отг.** $w=\dfrac{1}{4}$

7) $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)^{15}\left(1+i\right)^{-10}$ **отг.** $w=2^{10}i$

8) $w=\dfrac{\left(-2+2i\right)^{5}}{\left(-1-i\right)^{3}}+2i-64$ **отг.** $w=2i$

9) $w=\dfrac{\left(i-1\right)^{5}-1}{\left(i+1\right)^{5}+1}$ **отг.** $w=\dfrac{7+24i}{25}$

10) $w=\dfrac{\left(i+1\right)^{5}+1}{i^{19}+1}$ **отг.** $w=\dfrac{1-7i}{2}$

11) $w=\sqrt[4]{1-i}$ **отг.** $w_k=\sqrt[8]{2}\exp\left(\dfrac{-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi}{4}i\right),\ k=0,1,2,3$

12) $w=\sqrt[3]{-1+i}$ **отг.** $w_k=\sqrt[6]{2}\exp\left(\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}i\right),\ k=0,1,2$

13) $w=\sqrt[6]{\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}-i}}$ **отг.** $w_k=\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\exp\left(\dfrac{\frac{11\pi}{12}+2k\pi}{6}i\right),\ k=0\div 5$

14) $w=\sqrt[6]{\dfrac{-4+2i}{3+i}}$ **отг.** $w_k=\sqrt[12]{2}\exp\left(\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{6}i\right),\ k=0\div 5$

15) $w=\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$ **отг**. $w_{1,2}=\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$

16) $w=\sqrt[4]{-i}$ **отг.** $w_k=\exp\left(\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}i\right),\ k=0\div 3$

17) $w=\sqrt[4]{\dfrac{1-i}{i\sqrt{3}-1}}$ **отг.** $w_k=\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}\exp\left(\dfrac{-\frac{11\pi}{12}+2k\pi}{4}i\right),\ k=0\div 3$

18) Да се докаже, че $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

19) Да се пресметнат сумите:

а) $A=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta$,
$B=\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta$

отг. $A=\dfrac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$, $B=\dfrac{\sin\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

б) $A=1+\cos 2\theta+\cos 4\theta+...+\cos 2n\theta$,
$B=\sin 2\theta+\sin 4\theta+...+\sin 2n\theta$

отг. $A=\dfrac{\sin(n+1)\theta\,\cos n\theta}{\sin\theta}$, $B=\dfrac{\sin(n+1)\theta\,\sin n\theta}{\sin\theta}$

в) $A=\cos\theta+\cos 3\theta+...+\cos(2n-1)\theta$,
$B=\sin\theta+\sin 3\theta+...+\sin(2n-1)\theta$

отг. $A=\dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$, $B=\dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$

(***Упътване*:** Да се разгледа сумата $A+iB$.)

20) Да се докаже, че:

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-$$
$$-\binom{n}{6}\cos^{n-6}\theta\sin^6\theta+...;$$

$$\sin n\theta=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+$$
$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta+...,$$

където $\dbinom{n}{k}=C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Да се пресметнат $\cos 2\theta,\ \sin 2\theta, \cos 3\theta,\ \sin 3\theta$.

(***Упътване***: Да се приложат формулата на Моавър и биномът на Нютон за израза $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$, $n \in \mathbb{N}$, след което да се използва дефиницията за равенство на комплексни числа.)

отг. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

III. Да се решат уравненията и системите:

1) $z^3 - i = 0$ **отг.** $z_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2};\ z_3 = -i$

2) $z^3 + i = 0$ **отг.** $z_1 = i;\ z_{2,3} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$

3) $z^4 + 16 = 0$ **отг.** $z_{1,2} = \sqrt{2}(1 \pm i);\ z_{3,4} = \sqrt{2}(-1 \pm i)$

4) $z^6 + 64 = 0$ **отг.** $z_{1,2} = \pm 2i;\ z_{3,4} = \sqrt{3} \pm i;\ z_{5,6} = -\sqrt{3} \pm i$

5) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)z^6 = -1 - i$

отг. $z_k = \dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\exp\left(\dfrac{11 + 24k}{72}\pi i\right),\ k = 0 \div 5$

6) $(x + i)^n - (x - i)^n = 0,\ x \in \mathbb{R}$

отг. $x_k = \operatorname{cotg}\dfrac{k\pi}{n},\ k = 0 \div n - 1$

(***Упътване***: Уравнението да се сведе до вида: $\left(\dfrac{x + i}{x - i}\right)^n = 1$ или $z^n = 1$.)

7) $\left(\dfrac{1 + xi}{1 - xi}\right)^n = \dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha},\ x \in \mathbb{R}$

отг. $x_k = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha + k\pi}{n},\ k = 0 \div n-1$

8) а) $|z| + z = 2 + i$ **отг.** $z = \dfrac{3}{4} + i$

б) $|z| - z = 1 + 2i$ **отг.** $z = \dfrac{3}{2} - 2i$

(***Упътване***: Да се представи z в алгебричен вид: $z = x + iy$.)

9) а) $\left|\begin{array}{l} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3} \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1 \end{array}\right.$ **отг.** $\left|\begin{array}{l} z_1 = 6 + 17i \\ z_2 = 6 + 8i \end{array}\right.$

б) $\left|\begin{array}{l} \left|z^2 - 2i\right| = 4 \\ \left|\dfrac{z+i+1}{z-i-1}\right| = 1 \end{array}\right.$ **отг.** $z_{1,2} = \pm(1 - i)$

IV. Като се използват теоремите за действията с комплексни числа в тригонометричен (експоненциален) вид, да се пресметнат:

1) $\left|(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)\right|$ **отг.** 4

2) $\left|\dfrac{3-2i}{2+3i}\right|$ **отг.** 1

3) $\left|(1+i)^5\right|$ **отг.** $4\sqrt{2}$

4) $\left|\sqrt[5]{3-4i}\right|$ **отг.** $\sqrt[5]{5}$

5) $\operatorname{Arg}\dfrac{1+i}{1-i}$ **отг.** $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

6) $\operatorname{Arg}\left(1-i\sqrt{3}\right)^4$ **отг.** $-\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

7) $|z|$ и $\arg z$, ако:

а) $z=\dfrac{3-4i}{2i}$ **отг.** $|z|=\dfrac{5}{2};\ \arg z=-\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$

б) $z=(1-i)(2-i)$ **отг.** $|z|=\sqrt{10};\ \arg z=-\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$

в) $z=(1-i\sqrt{3})^4$ **отг.** $|z|=16;\ \arg z=-\dfrac{4\pi}{3}$

г) $z=\sqrt[5]{-1+i\sqrt{3}}$

отг. $|z|=\sqrt[5]{2};\ \arg z=\dfrac{2\pi}{15}\left(1+3k\pi\right),\ k=0\div4$

V. Да се начертаят областите, определени от следните неравенства:

1) $\left|z+1-i\right|>2$ **отг.** Външността на окръжност (без самата окръжност) с център $c=-1+i$ и радиус $R=2$

2) $-1<\operatorname{Re}z<1$ **отг.** Ивицата, заключена между правите $x=-1$ и $x=1$ (без самите прави)

3) $|z|<1$ **отг.** Единичният централен кръг (без окръжността, която го загражда)

4) $-\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$

отг. Ъгловата област между ъглополовящите на първи и четвърти квадрант, която се намира в дясната полуравнина (без ъглополовящите)

5) $1 \le |z| \le 2$ и $\dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}$

отг. Частта от кръговия венец в първи квадрант между централните окръжности с радиуси $R=1$ и $R=2$, заключен между правите, които минават през т. 0 и сключват ъгли $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{\pi}{3}$ с положителната посока на Ox (включително линиите, които го заграждат)

6) $|z+1-i| \le \sqrt{2}$ **отг.** Кръг с център $c=-1+i$ и радиус $R=\sqrt{2}$, включително окръжността, която го загражда

7) $|z-1+i| > 2$ **отг.** Външността на окръжност с център $c=1-i$ и радиус $R=2$ (без окръжността)

8) $\dfrac{\pi}{6} < \arg(z+i) < \dfrac{\pi}{2}$ **отг.** Ъгловата област надясно от Oy с връх $z=-i$ и рамене лъчите, минаващи през $z=0$ и $z=\sqrt{3}$ и сключващи помежду си ъгъл, равен на $\dfrac{\pi}{3}$ (без лъчите)

9) $|z+1| \ge 1$ **отг.** Външността на окръжност с център $c=-1$ и радиус $R=1$, включително окръжността

10) $|z+2| < 2$ **отг.** Отворен кръг (без окръжността) с център $c=-2$ и радиус $R=2$

11) $\mathrm{Re}(z+2) > 0$ **отг.** Полуравнината надясно от правата $x=-2$, без самата права

12) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-i) < \dfrac{3\pi}{4}$

отг. Ъгловата област с връх $z=i$ и рамене –

лъчите, сключващи ъгли $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$ с положителната ос Ox и минаващи през точките $z=-1$ и $z=1$ съответно (без лъчите); в посока $y>0$

13) $|z+1|+|z-1|<3$

отг. Вътрешността на елипса с фокуси $c=\pm 1$ и голяма полуос $a=\dfrac{3}{2}$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\left(b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ (без елипсата)

14) $|z+2|+|z-2|>5$

отг. Външността на елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\left(a=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{3}{2}\right)$ (без елипсата)

15) $-\dfrac{\pi}{2}\le \arg(z+1-i)\le \dfrac{3\pi}{4}$

отг. Частта от равнината надясно от лъчите с общ връх $z=-1+i$ и с уравнения $y=-x$ и $x=-1$ (включително лъчите)

16) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\le 1$ **отг.** Дясната полуравнина, включително оста Oy

17) $1\le\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|\le 2$ **отг.** Областта $D\equiv\begin{cases} y\le 0 \\ x^2+\left(y+\dfrac{5}{3}\right)^2\ge\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\end{cases}$

18) $|z^2-1|\ge a^2;\ a=const>0$

отг. Външността на лемнискатата
$\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 + 4x^2y^2 = a^4$
(включително лемнискатата)

19) $|z-1|<|z-i|$ **отг.** Част от равнината под правата $y = x$, без самата права

20) $4 \le |z-1| + |z+1| \le 8$

отг. Венецът между елипсите $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ и $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{15} = 1$, включително елипсите

21) $|z-2| - |z+2| < 2$

отг. Частта от равнината, лежаща надясно от левия клон на хиперболата $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$, без него

22) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < -\dfrac{1}{2}$ **отг.** $x^2 + (y-1)^2 < 1$

23) $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) + \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) < \dfrac{1}{2}$

отг. Областта, заключена между окръжностите
$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ и
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ (без самите тях)

VI. Да се установи какви криви изразяват следните уравнения:

1) $z = 1 + i - 3t - it^2$, където $t \in \mathbb{R}$

Решение: За да се получи параметричното уравнение на търсената крива, може да се използва дефиницията за равенство на две комплексни числа.

Нека $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Тогава

$$x + iy = 1 - 3t + i(1 - t^2),$$

откъдето $L \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$. Елиминирането на t $(t = \dfrac{1-x}{3}$ от първото уравнение се замества във второто) води до уравнението $L \equiv y = 1 - \dfrac{(1-x)^2}{9}$, което е уравнение на парабола.

2) $z = t + i(1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$ **отг.** Правата $x + y = 1$

3) $z = 1 + 2(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi)$

отг. Окръжността $(x-1)^2 + y^2 = 4$

4) $z = 2\cos\varphi + 3i\sin\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi)$

отг. Елипсата $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

5) $z\overline{z} + i(z - \overline{z}) - 2 = 0$ **отг.** Окръжността. $x^2 + (y-1)^2 = 3$

6) $|z - z_1| = |z - z_2|,\ z_1 \neq z_2$

отг. Симетралата на отсечката $\overline{AB}$: $A(z = z_1),\ B(z = z_2)$

7) $\mathrm{Re}(z^2 - \overline{z}) = 0$ **отг.** Хиперболата $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$

8) $\mathrm{Re}(1 + z) = |z|$ **отг.** Параболата $y^2 = 2x + 1$

9) $z = 2e^{it} + \dfrac{1}{2e^{it}}$ **отг.** Елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\left(a = \dfrac{5}{2},\ b = \dfrac{3}{2}\right)$

ГЛАВА 2

ФУНКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

§1. Основни понятия

В този параграф са дефинирани понятия, които се използват по-нататък в глава 2.

Дефиниция 1. Кривата L се нарича *непрекъсната*, ако тя може да бъде зададена с параметричните уравнения

(1) $$L \equiv \ x = \varphi(t),\ y = \psi(t); \quad a \le t \le \ b\,,$$

в които $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са непрекъснати функции в интервала $[a,b]$.

Например окръжността $L \equiv \ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ има следното параметрично задаване:

$$L \equiv \ x = \alpha + R\cos t,\ \ y = \beta + R\sin t \ \ ; \ \ 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Освен с параметричните уравнения (1) кривата L може да бъде зададена и с т. нар. *комплексно параметрично уравнение*

(2) $$L \equiv \ z = \varphi(t) + i\psi(t) \ = z(t); \quad a \le t \le b\,,$$

което се получава като в комплексната променлива $z = x + iy$ реалната (x) и имагинерната (y) части се заместят с равенства (1), а именно: $x = \varphi(t)$, а $y = \psi(t)$.

Тогава горната окръжност се записва във вида:

$$L \equiv z = \left(\alpha + R\cos t\right) + i\left(\beta + R\sin t\right) =$$

$$= \left(\alpha + i\beta\right) + R\left(\cos t + i\sin t\right) = c + \mathrm{R}e^{it}\,,$$

където $c = \alpha + i\beta$ е центърът на тази окръжност, а R - радиусът. Или $L \equiv |\,z - c\,| = R$.

Дефиниция 2. Кривата L, зададена с комплексно параметричното уравнение (2), се нарича *Жорданова*[18] *крива*, ако:

а) $z = z(t)$ е непрекъсната функция на променливата t в интервала $[a,b]$;

б) $z(t_1) \neq z(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, $t_1 \in (a,b)$, $t_2 \in [a,b]$, т.е. кривата L е без самопресичания.

Ако освен това $z(a) = z(b)$, то Жордановата крива L се нарича *затворена Жорданова крива*.

Дефиниция 3. Кривата L се нарича *гладка*, ако може да се зададе с параметричните уравнения (1), където $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имат непрекъснати производни от първи ред в $[a,b]$, които не се анулират едновременно за една и съща стойност на променливата t, т.е. $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$.

Условието, че съществуват производните $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, които не се анулират едновременно, геометрически означава, че във всяка точка t кривата L има допирателна, уравнението на която може да се запише във вида

$$\frac{x - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y - \psi(t)}{\psi'(t)},$$

където $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ са координатите на допирните точки.

Ако $\varphi'(t) = 0$, а $\psi'(t) \neq 0$, то уравнението на допирателната приема вида $x = \varphi(t)$, т.е. тя е успоредна на оста Oy. Обратно, ако $\varphi'(t) \neq 0$, а $\psi'(t) = 0$, то нейното уравнение е $y = \psi(t)$ и тя е успоредна на оста Ox. При $\varphi'(t) = 0$ и $\psi'(t) = 0$ едновременно за ъгловия коефициент $k = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ на допирателната получаваме

[18] C. M. E. Jordan (05.01.1838–21.01.1922) – френски математик.

неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$ и затова допирателна в тази точка t може въобще да няма.

Условието, че производните $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ са непрекъснати, геометрически означава, че ъгълът на наклона на допирателната към оста Ox, равен на $\operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, се изменя непрекъснато при непрекъснатото преместване на допирната точка по кривата L.

Дефиниция 4. Кривата L се нарича *по части гладка*, ако тя е непрекъсната и се състои от краен брой гладки части.

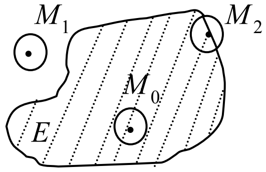
Дефиниция 5. Кривата L, зададена с параметричните уравнения (1), се нарича *ректифицируема*, ако има крайна дължина, като под дължина на крива се разбира границата, към която се стреми дължината на вписаната в тази крива (дъга от крива) начупена линия при неограниченото увеличаване на броя на отсечките ѝ, когато дължината на най-голямата от тях клони към нула.

Ще напомним, че е в сила следната теорема:

Теорема. Всяка гладка крива е ректифицируема.

Дефиниция 6. Кръгът $|z - z_0| < \rho$, с център $z = z_0$ и радиус $\rho > 0$, се нарича ρ*–околност* (кръгова околност) на точката $M_0(x_0, y_0)$ или $z = z_0 = x_0 + iy_0$.

За околност на точката z_0 може да служи и частта от равнината, заградена от квадрат, елипса и др.п. (без самите линии) с център в точката z_0 или z_0 може да не е център, но обезателно да принадлежи на своята околност[19].



Черт. 2.1

Дефиниция 7. Точка от множеството E се нарича *вътрешна точка* на това множество, ако съществува такава нейна околност, всички точки на която принадлежат на E (точка M_0, черт. 2.1).

Дефиниция 8. Точка, непринадлежаща на множеството E, се нарича *външна точка* на това множество, ако съществува нейна околност, която не съдържа точки от множеството E (точка M_1, черт. 2.1).

Дефиниция 9. Една точка се нарича *контурна (гранична) точка* на множеството E (тя може да принадлежи, може и да не принадлежи на E), ако всяка нейна околност съдържа точки, както принадлежащи, така и непринадлежащи на множеството E (точка M_2, черт. 2.1).

Дефиниция 10. Множество, което се състои само от вътрешни точки, се нарича *отворено множество*.

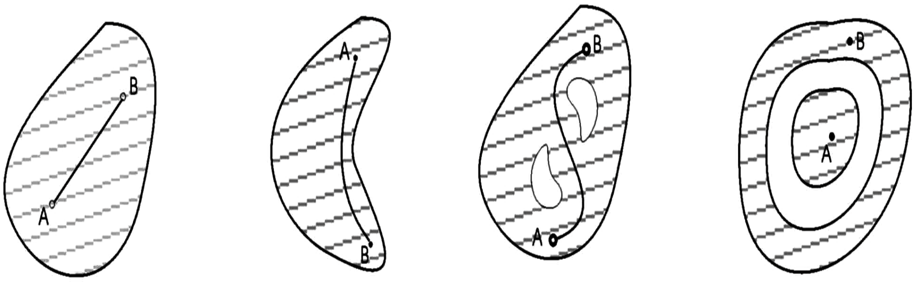
Дефиниция 11. Съвкупността от всички контурни точки на множеството E се нарича негов *контур (граница)* и се означава с ∂E.

Дефиниция 12. Множеството E от точки в равнината се нарича *ограничено*, ако изцяло се съдържа в кръг с краен радиус.

---

[19] Под околност на безкрайно отдалечената точка разбираме множеството на всички точки, които лежат вън от една (подходящо подбрана) окръжност $|z| > \dfrac{1}{\rho}$, т.е. множеството $\left\{ z,\ z \in \mathbb{C},\ |z| > \dfrac{1}{\rho} \right\}$.

Дефиниция 13. Множеството E се нарича *свързано,* ако всеки две негови точки могат да се съединят с непрекъсната крива, всички точки на която принадлежат на E (черт. 2.2 а), б), в)). В противен случай множеството *не е свързано* (черт. 2.2 г)).

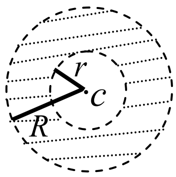


а) б) в) г)

Черт. 2.2

Дефиниция 14. Всяко отворено свързано множество се нарича *област.*

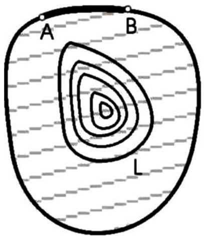
Например кръгът $|z|<R$ е област, но затвореният кръг $|z|\leq R$ не е област. Венецът $r<|z-c|<R$ между двете концентрични окръжности с общ център $z=c$ и радиуси r и R (черт. 2.3) е област. Затвореният венец $r\leq|z-c|\leq R$ вече не е област.



Черт. 2.3

Дефиниция 15. Област, контурът на която е свързано множество, се нарича *едносвързана* (черт 2.2 а), б), черт. 2.4 и черт. 2.7). В противен случай областта се нарича *не едносвързана* или *многосвързана* (черт. 2.2 в), черт. 2.3, черт. 2.5 и черт. 2.6).

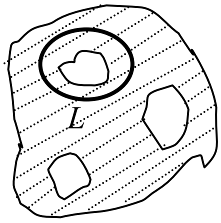
Едносвързаната и многосвързана области могат да се дефинират и по следния еквивалентен начин:



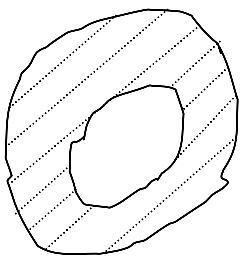
Черт. 2.4

Дефиниция 16. Областта се нарича *едносвързана*, ако коя да е затворена крива L в тази област може да бъде свита в точка, без да излиза от областта и без да се прекъсва кривата (черт. 2.4). Ако пък в областта се намери такава затворена крива L (черт. 2.5), която не може да бъде свита в точка с непрекъснато изменение, без да излиза от областта, то тази област се нарича *многосвързана*.

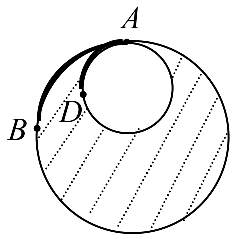
Областта на черт. 2.6 е двусвързана, но областта на черт. 2.7 е едносвързана.



Черт. 2.5



Черт. 2.6



Черт. 2.7

Дефиниция 17. Точката $z = z_0$ се нарича *точка на сгъстяване* на точковото множество E, ако всяка околност на точката $z = z_0$ съдържа поне една точка на множеството E, различна от z_0.

Дефиниция 18. Ако точката $z_0 \in E$, но не е негова точка на сгъстяване, тя се нарича *изолирана точка* на множеството E.

Дефиниция 19. Множеството от всички точки на сгъстяване на множеството E се нарича *производно множество* и се означава с E'.

Ако $E' \subset E$, множеството E се нарича *затворено*. Означава се $\overline{E}$.

Ако $E \subset E'$, множеството E се нарича *гъсто.*

Ако $E = E'$, множеството E се нарича *съвършено.*

Множеството $E \cup E' = [E]$ се нарича *затворена обвивка на* E.

И така едно множество се нарича *затворено*, ако съдържа всичките си точки на сгъстяване. Едно множество е *гъсто*, ако не притежава изолирани точки. Едно множество е *съвършено*, ако е затворено и гъсто.

§2. Числови редици с комплексни членове

Нека разгледаме безкрайната редица от комплексни числа $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$: $z_1, z_2, ..., z_n, ...$, където $z_n = x_n + iy_n$, $z_n \neq \infty$.

Дефиниция 1. Редицата $\{z_n\}$ се нарича *ограничена*, ако съществува такова число $M \geq 0$, че $|z_n| \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ако това не е изпълнено, т.е. ако за произволно число $M > 0$ се намерят безброй много членове на редицата $\{z_n\}$, удовлетворяващи условието $|z_n| > M$, то редицата се нарича *неограничена*.

Теорема 1. Редицата $\{z_n\}$, където $z_n = x_n + iy_n$, е ограничена тогава и само тогава, когато са ограничени редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказателство: *Необходимост*: Нека редицата $\{z_n\}$ е ограничена, т.е. за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството $|z_n| \leq M$, където $M \geq 0$. Тогава от неравенствата $|x_n| \leq |z_n|$ и $|y_n| \leq |z_n|$ следва, че $|x_n| \leq M$ и $|y_n| \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, с което е доказана ограничеността на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Достатъчност: Нека сега редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са ограничени, т.е. съществува число $M \geq 0$ такова, че са в сила неравенствата $|x_n| \leq M$ и $|y_n| \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава от неравенството $|z_n| \leq |x_n| + |y_n|$ следва, че $|z_n| \leq 2M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, което и доказва ограничеността на редицата $\{z_n\}$.

Дефиниция 2. Комплексното число $z_0 = x_0 + iy_0$ се нарича *граница* на редицата $\{z_n\}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че за всички членове с номера $n > N$ да е изпълнено неравенството $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Означаваме $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Всяка редица $\{z_n\}$, която има граница, се нарича *сходяща*.

Геометричният смисъл на $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ (по дадената дефиниция 2) е, че всеки кръг с център точката z_0 и радиус $\varepsilon > 0$ съдържа всички членове на редицата от известен номер $(n > N)$ нататък. Извън този кръг има само краен брой членове на тази редица: $z_1, z_2, ..., z_N$.

Теорема 2. Необходимите и достатъчни условия редицата $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n$, да е сходяща към крайното комплексно число $z_0 = x_0 + iy_0$ са $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Доказателство: *Необходимост*: Нека $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Тогава по дефиниция 2 за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че за $n > N$ се изпълнява неравенството

(1) $$| z_n - z_0 | < \varepsilon .$$

Но

(2) $$| z_n - z_0 | = \left| (x_n - x_0) + i(y_n - y_0) \right| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} .$$

Тогава от (1) и (2) следва, че $\left| x_n - x_0 \right| \leq | z_n - z_0 | < \varepsilon$ и $\left| y_n - y_0 \right| \leq | z_n - z_0 | < \varepsilon$ за всяко $n > N$, което и доказва, че $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Достатъчност: Нека сега $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че за $n > N$ са в сила неравенствата.

(3) $$\left| x_n - x_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left| y_n - y_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Тъй като $| z_n - z_0 | = \left| (x_n - x_0) + i(y_n - y_0) \right| \leq \left| x_n - x_0 \right| + \left| y_n - y_0 \right|$, то според (3) се получава, че $\left| z_n - z_0 \right| < \varepsilon$ за всяко $n > N$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, което трябваше да се докаже.

От теорема 2 следва, че всеки въпрос за сходимостта на редица $\{z_n\}$ с комплексни членове $z_n = x_n + iy_n$ е еквивалентен на въпроса за сходимостта на двете редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ с реални членове. Затова например известните теореми за сума, разлика, произведение и частно на две сходящи редици с реални членове се пренасят без изменение и за редици с комплексни членове. А именно, ако редиците $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$ клонят съответно към крайните комплексни числа z'_0 и z''_0, то редиците $\{z'_n \pm z''_n\}$, $\{z'_n z''_n\}$ и

$\left\{ \dfrac{z_n{}'}{z_n{}''} \right\}$ (последната при условие, че $z_n'' \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) и $z_0'' \neq 0$) са също сходящи и са в сила следните съотношения:

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n' \pm z_n''\right) = \lim_{n\to\infty} z_n' \pm \lim_{n\to\infty} z_n'' = z_0' \pm z_0'',$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n' z_n''\right) = \left(\lim_{n\to\infty} z_n'\right)\left(\lim_{n\to\infty} z_n''\right) = z_0' z_0'',$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_n{}'}{z_n{}''}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n{}'}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n''} = \frac{z_0{}'}{z_0{}''}.$$

За решаване на въпроса за сходимостта на редицата $\{z_n\}$ вместо редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ могат да се разглеждат редиците от модулите и главните стойности на аргументите: $\{|z_n|\}$ и $\{\arg z_n\}$. Това е по-удобно например при разглеждането на редици, клонящи към нула, тъй като за да клони редицата $\{z_n\}$ с комплексни членове към нула е необходимо и достатъчно редицата от модулите на членовете ѝ $\{|z_n|\}$ да клони към нула. (Втората редица $\{\arg z_n\}$ тук съвсем не е необходимо да разглеждаме – тя може да бъде и разходяща.) Наистина достатъчно е да се отбележи, че от верността на неравенството $|z_n - 0| = |z_n| < \varepsilon$ за $n > N(\varepsilon)$ следва, че както редицата с комплексни членове $\{z_n\}$, така и редицата с реални членове $\{|z_n|\}$ са сходящи към нула.

В общия случай едновременната сходимост на редиците $\{|z_n|\}$ и $\{\arg z_n\}$ е достатъчна за сходимостта на редицата $\{z_n\}$; при това, ако $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = r$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \varphi$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Наистина имаме, че

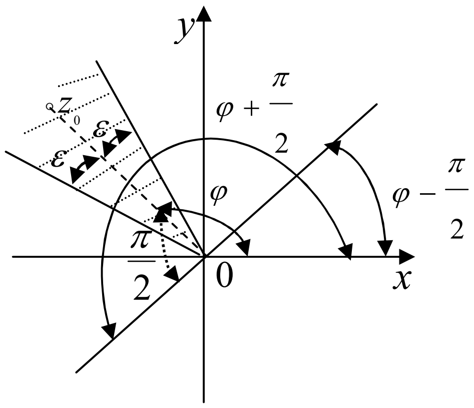
$$x_n = \mathrm{Re}(z_n) = |z_n| \cos\varphi_n, \;\; y_n = \mathrm{Im}(z_n) = |z_n| \sin\varphi_n,$$
поради което
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} |z_n| \cos\varphi_n = r\cos\varphi \;\text{ и}$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} |z_n| \sin\varphi_n = r\sin\varphi,$$
откъдето следва горното твърдение.

Обратно, ако редицата $\{z_n\}$ е сходяща, то е сходяща и редицата от модулите $\{|z_n|\}$. Наистина $|z_n| = \sqrt{x_n^{\,2} + y_n^{\,2}}$ и, тъй като редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са сходящи (теорема 2) и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, то съществува и $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}$.

Ще отбележим, че редицата от аргументите $\{\arg z_n\}$ на сходящата редица $\{z_n\}$ може да е разходяща даже и в случая, когато $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$. Например за редицата $z_n = -1 + i\dfrac{(-1)^n}{n}$ е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -1$, но от равенствата $\arg z_{2k} = \pi - \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2k}$ и $\arg z_{2k+1} = -\pi + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2k+1}$ е очевидно, че редицата $\{\arg z_n\}$ е разходяща. Обаче и тук може да се намери сходяща редица от стойностите на $\mathrm{Arg}\, z_n$. Нека с φ_n бъде означена главната стойност на $\mathrm{Arg}\, z_n$, заключена между 0 и 2π: $0 \le \varphi_n < 2\pi$. Тогава очевидно се получава $\varphi_{2k} = \pi - \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2k}$ и $\varphi_{2k+1} = \pi + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2k+1}$, при което редицата $\{\varphi_n\}$ клони към π.

Ако въобще $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \neq 0$ и φ е каква да е стойност на $\operatorname{Arg} z_0$, то започвайки от някаква стойност $n = N$, всички точки на редицата $\{z_n\}$ ще лежат вътре в ъгъла, образуван от лъчите, сключващи с оста Ox ъгли $\varphi - \frac{\pi}{2}$ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$, и съдържащ точката z_0 (черт. 2.8). Затова за аргументите $\operatorname{Arg} z_{N+1}, \operatorname{Arg} z_{N+2}, \ldots$ могат да се изберат стойностите $\varphi_{N+1}, \varphi_{N+2}, \ldots$, удовлетворяващи неравенствата $|\varphi_{N+n} - \varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Като се вземат за $\operatorname{Arg} z_1, \ldots, \operatorname{Arg} z_N, \ldots$ техните стойности $\varphi_1, \ldots, \varphi_N, \ldots$, може да се заключи, че редицата $\{\varphi_n\}$ е сходяща и има граница, равна на φ. Наистина за всяко ε, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, може да се намери $N_1(\varepsilon) \geq N$, такова че точките на редицата $\{z_n\}$ с номера, по-големи от N_1, лежат вътре в ъгъла, образуван от лъчите, сключващи с реалната ос ъгли $\varphi - \varepsilon$ и $\varphi + \varepsilon$ и съдържащ точката z_0. За тях стойностите на φ_n са заключени в границите



Черт. 2.8

$\varphi - \varepsilon < \varphi_n < \varphi + \varepsilon$, т.е. при $n > N_1$ се изпълнява неравенството $|\varphi_n - \varphi| < \varepsilon$, откъдето следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.

Ще отбележим, че в случая, когато $z_0 \neq 0$ не е реално отрицателно число, в качеството на φ_n и φ могат да се вземат главните стойности на аргумента. Тогава се получава: $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n = \arg z_0$.

Следователно, ако редицата $\{z_n\}$ е сходяща и нейната граница е $z_0 \neq 0$, то за всяка стойност $\varphi = \operatorname{Arg} z_0$ съществува редица от стойности $\varphi_n = \operatorname{Arg} z_n$, клоняща към $\operatorname{Arg} z_0$. Именно в този смисъл ще разбираме, че $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} z_0$. В случай, че $z_0 \neq 0$ не е отрицателно реално число, в частност ще имаме $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \arg z_0$.

От теорема 2 следва още, че основните свойства на границите на редици от реални числа остават в сила и за редиците от комплексни числа, като доказателствата им са аналогични на тези от реалния анализ. Затова само ще ги цитираме. Първо ще дадем едно следствие на теорема 2.

Следствие. Ако редицата $\{z_n\}$ е сходяща и има граница числото z_0, то и всяка нейна подредица $\left\{z_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща и има граница същото число z_0.

Теорема 3. (*Общ критерий на Коши*[20]) За да бъде редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходяща, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да може да се намери номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че при $n > N$ да се изпълнява неравенството $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$ за всяко естествено число p.

Теорема 4. Всяка сходяща редица с комплексни членове е ограничена.

---

[20] A. L. Cauchy (21.08.1789-23.05.1857) – френски математик.

Обратното не винаги е вярно.

Например редицата $z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) i^n$, $n \in \mathbb{N}$, е ограничена, тъй като $|z_n| \le 1 + \frac{1}{n} \le 2$ за $n \in \mathbb{N}$, но тази редица няма граница, понеже при:

$$n = 4k,\ k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} z_{4k} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4k}\right) = 1;$$

$$n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} z_{4k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4k+1}\right) i = i;$$

$$n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} z_{4k+2} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4k+2}\right)(-1) = -1;$$

$$n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} z_{4k+3} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4k+3}\right)(-i) = -i.$$

Дефиниция 3. Точката z_0 се нарича *точка на сгъстяване* на редицата $\{z_n\}$, ако във всяка околност на точката z_0 се съдържат безброй много членове на редицата $\{z_n\}$, при което не е изключена възможността също безброй много членове на тази редица да са извън взетата околност.

Една безкрайна редица може да има няколко точки на сгъстяване.

Примери: 1) Редицата $\frac{1}{2}, 3i, \frac{1}{3}, \frac{5i}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \frac{(2n+1)i}{n}, \ldots$ има две точки на сгъстяване: $z_1 = 0$ и $z_2 = 2i$, като и двете не са членове на редицата.

2) Редицата $z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) i^n$ има четири точки на сгъстяване: $z_{1,2} = \pm 1$ и $z_{3,4} = \pm i$, както се вижда от написаното по-горе за тази редица.

Теорема 5. (***Болцано***[21] **–** ***Вайерщрас***) Всяка ограничена редица $\{z_n\}$ има поне една точка на сгъстяване.

Теорема 6. Ако една редица е сходяща, то единствената й точка на сгъстяване е нейната граница.

Теорема 7. Ако една безкрайна редица е ограничена и има само една точка на сгъстяване, то тя е сходяща.

Теорема 8. (*Принцип за компактност*) Нека z_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{z_n\}$. Тогава от редицата $\{z_n\}$ може да се отдели сходяща подредица $\left\{z_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, клоняща към z_0.

Задачи

I. Да се докаже, че:

1) Редицата $\left\{z^n\right\}$ е сходяща за $|z| < 1$ и $z = 1$, а разходяща за $|z| \geq 1, \quad z \neq 1$.

[21] B. Bolzano (05.10.1781-18.12.1848) – чешки математик,философ и логик.

Доказателство: Нека първо $z=1$. Тогава очевидно $\left\{z^n\right\}=\left\{1^n\right\}=1,1,\ldots$ и нейната граница е 1.

Нека сега $|z|=q<1$. Тогава по $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N=N(\varepsilon)$, такъв че за $n>N$ да е в сила неравенството $|z^n-0|=|z|^n=q^n<\varepsilon$. Наистина след логаритмуване на неравенството се получава $n\ln q<\ln\varepsilon$, откъдето $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln q}$, т.е. може да се вземе $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln q}\right]$.

(Записът $[x]$ или $E(x)$ означава цялата част на числото x, т.е. най-голямото цяло число, което не надминава x. Чете се "скобка от x".)

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} z^n=0$ при $|z|<1$.

Ако $|z|>1$, то $\dfrac{1}{|z|}<1$ и тогава $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{z^n}=0$. Оттук е ясно, че $\lim\limits_{n\to\infty} z^n=\infty$, т.е. редицата в този случай е разходяща. При $z=-1$ редицата е също разходяща (има две точки на сгъстяване: $+1$ и -1). При $|z|=1$, но $z\neq\pm1$, тригонометричният вид на z е $z=1(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Следователно $z^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$. След граничен преход в реалната и имагинерната части на z^n при $n\to\infty$ се получава, че тези граници не съществуват. Следователно и в този случай редицата $\left\{z^n\right\}$ е разходяща.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{i\varphi}{n}\right)^n=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$, $\varphi\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$.

Доказателство: Нека $z = 1 + \frac{i\varphi}{n}$. Тогава $|z| = \sqrt{1 + \frac{\varphi^2}{n^2}}$, а $\arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi}{n}\right) + m\pi$, $m = 0, \pm 1$. Но при $n \to \infty$ се получава, че $\frac{\varphi}{n} \to 0$, т.е. при $n \to \infty$ се взема $m = 0$.

Записваме z в тригонометричен вид:

$$z = \sqrt{1 + \frac{\varphi^2}{n^2}}\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n} + m\pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n} + m\pi\right)\right].$$

По формулата на Моавър получаваме:

$$z^n = \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n =$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2}\right)^n}\left[\cos n\left(\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n} + m\pi\right) + i\sin n\left(\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n} + m\pi\right)\right].$$

Пресмятаме

$$\lim_{n\to\infty} |z|^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}}\right]^{\frac{\varphi^2}{2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi^2}{2n}} =$$

$$= e^0 = 1$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \arg z^n = \lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}}\varphi = \varphi.$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{i\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$.

Равенството е доказано.

Същата граница може да се докаже и по друг начин като се използват биномът на Нютон за $\left(1+\dfrac{i\varphi}{n}\right)^n$ и познатите редове за $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Оставяме това на читателя за самостоятелна работа.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z,\ z = x+iy$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{z}-1) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln z + 2k\pi i = \mathrm{Ln}\, z,$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ k\in\mathbb{Z}$

(По-нататък в § 6 се извеждат формулите $\ln z = \ln r + i\varphi$, където $r = |z|$, а $\varphi = \arg z$ и $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$.)

(***Упътване*:** Да се отделят Re и Im части в общия член на дадената редица като се използва формулата за n-ти корен от комплексно число.)

II. Да се намери границата $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, ако:

1) $z_n = \dfrac{i+2}{n^2}$ **отг.** 0

2) $z_n = \dfrac{n(1-i)}{2n-3}$ **отг.** $\dfrac{1-i}{2}$

3) $z_n = \left(\dfrac{1-i}{2}\right)^n$ **отг.** 0

4) $z_n = \arg\left(-1 + \dfrac{i}{n}\right)$ **отг.** π

5) $z_n = \dfrac{a^n}{1 + a^{2n}}, \ |a| < 1$ **отг.** 0

6) $z_n = \dfrac{a^n}{1 + a^{2n}}, \ |a| > 1$ **отг.** 0

7) $z_n = \dfrac{a}{1^4} + \dfrac{a^2}{2^4} + \ldots + \dfrac{a^n}{n^4}, \ |a| > 1$ **отг.** ∞

(***Упътване***: Вж. пример 4, § 3.)

8) $z_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + e^{i\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}\right), \ 0 < \varphi < 2\pi$ **отг.** 0

(***Упътване***: Да се използват формулата за n-та сума на геометрична прогресия и формулата на Ойлер. Да се отделят Re и Im части. Или да се покаже, че $\left|z_n\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.)

9) $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} - \ldots + (-1)^n e^{in\varphi}\right), \ -\pi < \varphi < \pi$ **отг.** 0

10) $z_n = \dfrac{1}{n+1}\left[n + 1 + nz + (n-1)z^2 + \ldots + z^n\right], \ |z| \le 1, \ z \ne 1$

отг. $\dfrac{1}{1-z}$

(***Упътване***: Да се изнесе пред скоби z^n и да се направи смяната $\dfrac{1}{z} = w$, $|w| \ge 1, \ w \ne 1$. Да се намери сумата и да се диференцира полученото равенство.)

11) $z_n = \frac{1}{2n+1}\left[2n+1-(2n-1)z^2+(2n-3)z^4-...+(-1)^n z^{2n}\right],$

$|z| \leq 1,\ z \neq \pm i$ **отг.** $\frac{1}{1+z^2}$

§3. Числови редове с комплексни членове

Да разгледаме реда

(1) $$z_1 + z_2 + ... + z_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} z_n\ ,$$

където z_n са дадени комплексни числа $(z_n \neq \infty)$.

Нека образуваме редицата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ от частичните (парциални) суми на реда (1), където

(2) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k,\ n = 1,\ 2,...\ .$$

Дефиниция 1. Редът (1) се нарича *сходящ*, ако редицата (2) е сходяща, а границата $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ се нарича *сума* на този ред.

В противен случай (т. е. ако редицата (2) е разходяща) редът (1) се нарича *разходящ*.

Нека членовете на реда (1) са $z_n = x_n + iy_n,\quad n = 1,2,...$. Тогава редът (1) може да се запише във вида

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n ,$$

т. е. като сума на два безкрайни числови реда, образувани съответно само от реалните и само от имагинерните части на членовете си.

Теорема 1. Редът (1) е сходящ тогава и само тогава, когато са сходящи и двата реда, стоящи в дясната страна на равенство (3). При това, ако сумата на дадения ред (1) е S, сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sigma$, а на реда $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \tau$, то $S = \sigma + i\tau$.

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от факта, че $S_n = \sigma_n + i\tau_n$, където S_n е зададена с равенство (2), а частичните суми σ_n и τ_n са съответно: $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, а $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$, и от казаното в § 2 за граница на редица.

Общият критерий на Коши (теорема 3, § 2), приложен за редицата (2) от парциалните суми на реда (1), дава *най-общия критерий за сходимост на реда* (1): необходимото и достатъчно условие за сходимостта на този ред е за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува номер $m = m(\varepsilon)$, такъв че

$$\left| S_{m+p} - S_m \right| = \left| z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_{m+p} \right| < \varepsilon$$

за всяко естествено число p ($p \in \mathbb{N}$).

Пример 1. Да се докаже сходимостта на реда $c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n + \ldots$, ако:

а) $c_n > 0$, $n = 0,1,2,\ldots$; $c_0 \geq c_1 \geq \ldots \geq c_n \geq \ldots$; $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

и

б) a е комплексно число ($a \in \mathbb{C}$), $a \neq 1$, $|a| = 1$.

Доказателство: Нека

$$S_{m+p} - S_m = c_{m+1}a^{m+1} + \ldots + c_{m+p}a^{m+p}.$$

След умножаване на това равенство с $(1-a)$ се получава

$$\begin{aligned}&(1-a)\left(S_{m+p} - S_m\right) = \\ &= \left(c_{m+1}a^{m+1} + \ldots + c_{m+p}a^{m+p}\right) - \left(c_{m+1}a^{m+2} + \ldots + c_{m+p}a^{m+p+1}\right) = \\ &= c_{m+1}a^{m+1} - \left(c_{m+1} - c_{m+2}\right)a^{m+2} - \ldots - \\ &- \left(c_{m+p-1} - c_{m+p}\right)a^{m+p} - c_{m+p}a^{m+p+1}.\end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned}&\left|(1-a)\left(S_{m+p} - S_m\right)\right| \le \\ &\le c_{m+1} + \left(c_{m+1} - c_{m+2}\right) + \left(c_{m+2} - c_{m+3}\right) + \ldots + \\ &+ \left(c_{m+p-1} - c_{m+p}\right) + c_{m+p} = 2c_{m+1},\end{aligned}$$

т. е.

$$\left|S_{m+p} - S_m\right| \le \frac{2c_{m+1}}{|1-a|}.$$

Понеже дясната страна на полученото неравенство не зависи от p и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер $m = m(\varepsilon)$, такъв че $\dfrac{2c_{m+1}}{|1-a|} < \varepsilon$ и следователно за всяко $p \in \mathbb{N}$ се получава $\left|S_{m+p} - S_m\right| < \varepsilon$, т. е. разглежданият в примера ред при дадените условия а) и б) е сходящ.

В частност при $a = -1$ се получава познатият критерий на Лайбниц[22] за алтернативни редове с реални членове. При $a = 1$ непосредствено се изследва полученият ред: $c_0 + c_1 + \ldots + c_n + \ldots$.

---

[22] G. W. Leibnitz (01.07.1646-14.11.1716) – немски математик, физик и философ.

Тук е мястото да се припомнят някои изучени *свойства* на числовите редове с реални членове, които са в сила и за редовете с комплексни членове, а именно:

1) Сходимостта (разходимостта) на безкрайния ред (1) не се нарушава, ако се премахнат или добавят краен брой членове. Оттук следва, че безкрайният ред

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots,$$

наречен n*-ти остатък* на реда (1), е сходящ или разходящ едновременно с реда (1).

Ако редът (1) е сходящ и неговата сума е S, то е очевидно, че $S = S_n + R_n$, откъдето $R_n = S - S_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Оттук непосредствено следва

Теорема 2. (*Необходимо условие за сходимост*) Ако редът (1) е сходящ, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Наистина $z_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} S - S = 0$.

Обратното не винаги е вярно. Но ако $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$, то редът (1) е разходящ.

2) Ако всички членове на сходящия (разходящия) ред (1) се умножат с едно и също число $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то полученият ред е също сходящ (разходящ). При това, ако редът (1) е сходящ и има сума S, то новополученият ред има сума λS.

3) Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ са сходящи числови редове с комплексни членове, сумите на които са съответно S и W, то редът $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm w_n)$, получен от почленното събиране (изваждане) на горните два реда, е също сходящ и неговата сума е $S \pm W$.

Дефиниция 2. Редът (1) се нарича *абсолютно сходящ*, ако е сходящ редът

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots.$$

Теорема 3. За да бъде редът (1) сходящ, е достатъчно (но не и необходимо) редът (4) да бъде сходящ, т.е. всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Следствие. Редът (1) е абсолютно сходящ тогава и само тогава, когато редовете $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ в равенство (3) са абсолютно сходящи.

Доказателство: Следва непосредствено от неравенствата
$|x_n| \le |z_n| \le |x_n| + |y_n|$ и $|y_n| \le |z_n| \le |x_n| + |y_n|$.

В сила са следните две *свойства*:

1) Ако редът (1) е абсолютно сходящ, то полученият при произволно разместване на членовете му ред е също абсолютно сходящ и има сума, равна на сумата на реда (1).

2) В абсолютно сходящите редове с комплексни членове е разрешено произволно групиране на членовете му, като в една група могат да попаднат както краен, така и безкраен брой членове.

Тези свойства се получават непосредствено от следствието и от това, че са в сила за абсолютно сходящи редове с реални членове.

Тъй като редът (4) е с неотрицателни членове, то по отношение на него могат да се приложат теоремите за сравнение и критериите за сходимост на такива редове, изучени в реалния анализ. Например *критериите на*:

а) *Даламбер*. При $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le q < 1 \ (n \in \mathbb{N})$ редът (1) е абсолютно сходящ, а при $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| \ge 1 \ \ (n \in \mathbb{N})$ и двата реда ((1) и (4)) са разходящи (ако горните неравенства се изпълняват от известно място нататък).

Или в гранична форма: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = l$.

Ако $l < 1$, то редът (1) е абсолютно сходящ. Ако $l > 1$, то редовете (1) и (4) са разходящи, а при $l = 1$ не може да се каже нищо за характера на редовете (1) и (4). Необходимо е да се приложи по-силен критерий.

б) *Коши*. При $\sqrt[n]{|z_n|} \le q < 1 \ \ (n \in \mathbb{N})$ редът (1) е абсолютно сходящ, а при $\sqrt[n]{|z_n|} \ge 1 \ \ (n \in \mathbb{N})$ и той, и редът (4) са разходящи (ако горните неравенства се изпълняват от известно място нататък).

Или в гранична форма: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = l$.

При $l < 1$ редът (1) е абсолютно сходящ, при $l > 1$ редовете (1) и (4) са разходящи, а при $l = 1$ критерият на Коши също не дава отговор на въпроса за сходимостта на реда (4), а оттам и за абсолютната сходимост на реда (1).

Пример 2. Геометричният ред

(5) $$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots \quad (z \in \mathbb{C})$$

е абсолютно сходящ, когато $|z| = q < 1$, тъй като числовият ред с неотрицателни членове

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$$

представлява сходяща геометрична прогресия със сума $\dfrac{1}{1-q}$.

Тогава редът (5) има сума $S=\dfrac{1}{1-z}$.

Ако $|z|\geq 1$, то общият член на реда (5) има абсолютна стойност $|z|^n\geq 1$. Следователно общият член на реда (5) не клони към нула (не е изпълнено необходимото условие за сходимост на числов ред) и редът (5) е разходящ.

Дефиниция 3. Редът (1) се нарича *условно сходящ*, ако той е сходящ, но не абсолютно, т.е. редът (4) е разходящ.

Забележка: Ако редът (4) е разходящ по критериите на Даламбер и Коши или ако за него не се изпълнява необходимото условие за сходимост, то и редът (1) е разходящ.

Теорема 4. (Коши) Ако редовете $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \zeta_n$ са абсолютно сходящи и имат суми съответно S и S^*, то и тяхното произведение – редът

(6) $\quad z_0\zeta_0+(z_0\zeta_1+z_1\zeta_0)+\ldots+(z_0\zeta_n+z_1\zeta_{n-1}+\ldots+z_n\zeta_0)+\ldots$

е също абсолютно сходящ и неговата сума е $S.S^*$.

От теорема 4 става ясно, че правилото на Коши за умножаване на два абсолютно сходящи реда с реални членове е в сила и за абсолютно сходящи редове с комплексни членове. Това правило е обобщено от Мертенс[*)] (1874 г.) и за случая, когато само единият от двата реда е абсолютно сходящ, а другият – условно.

[*)] F. Mertens (1840-1927) – немски математик.

Теорема 5. (Коши - Мертенс) Ако единият от редовете $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n$ е абсолютно сходящ, а другият е условно сходящ, то произведението (6) на тези два реда е също сходящ ред със сума $S.S^*$.

Пример 3. Разглежда се абсолютно сходящият геометричен ред $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $|z|<1$. След умножаване на този ред сам със себе си се получава

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

От друга страна

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = (1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots)(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots) =$$

$$= 1.1 + (1.z + z.1) + (1.z^2 + z.z + z^2.1) + \ldots +$$

$$+ (1.z^{n-1} + z.z^{n-2} + \ldots + z^{n-1}.1) =$$

$$= 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} + \ldots .$$

Следователно

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Аналогично

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2!} z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^3}.$$

И т. н.

В заключение ще бъде разгледана връзката между числови редове и числови редици с комплексни членове.

Дадена е безкрайната редица от комплексни числа

(7) $$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \, .$$

Заедно с нея се разглежда редът

(8) $$z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots \, .$$

Ясно е, че n-тата парциална сума на реда (8) $S_n = z_n$, откъдето следва, че ако редицата (7) е сходяща, то и редът (8) е сходящ и обратно. При това $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Това позволява понякога изследването на една числова редица да се сведе до изследването на сходимостта на съответния ѝ числов ред.

Пример 4. Дадена е редицата с общ член

$$z_n = \frac{a}{1^4} + \frac{a^2}{2^4} + \ldots + \frac{a^n}{n^4}, \quad |a| > 1 .$$

Да се намери $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Решение: Образува се редът

$$z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots$$

с общ член

$$z_n - z_{n-1} = \left(\frac{a}{1^4} + \frac{a^2}{2^4} + \ldots + \frac{a^n}{n^4} \right) - \left(\frac{a}{1^4} + \frac{a^2}{2^4} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)^4} \right) = \frac{a^n}{n^4},$$

т.е. редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^4}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^4} = \infty$ при $|a| > 1$, т. е. не е изпълнено необходимото условие за сходимост на ред. Следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^4}$ е разходящ, а от тук и разглежданата редица е разходяща, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Задачи

Да се изследват за сходимост редовете $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, ако:

1) $z_n = \dfrac{n}{3^n}(1+i)^n$.

Решение: $|z_n| = \dfrac{n}{3^n}|1+i|^n = \dfrac{n}{3^n}\sqrt{2^n}$. Критерият на Даламбер, приложен за реда с общ член $|z_n|$, дава

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{2^{n+1}}}{3^{n+1}}\,\frac{3^n}{n\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}(1+i)^n$ е абсолютно сходящ.

2) $z_n = \dfrac{(2-i)^n}{3^n}$.

Решение: $|z_n| = \dfrac{|2-i|^n}{3^n} = \dfrac{\sqrt{5^n}}{3^n}$. Прилага се критерият на Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} < 1$. Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2-i)^n}{3^n}$ е абсолютно сходящ.

3) $z_n = \dfrac{i^n}{n}$.

Решение: $|z_n| = \dfrac{1}{n}$. Получава се общият член на хармоничния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, който е разходящ. Следователно изследваният ред не е абсолютно сходящ. За да се изследва за условна сходимост, числото i може да се представи в тригонометричен вид и да се приложи формулата на Моавър за i^n:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}; \qquad i^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Но

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases}; \ \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^{k-1}, & n = 2k-1 \end{cases},$$

където $k, n \in \mathbb{N}$.

Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}(-1)^k + i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}(-1)^{k-1}.$$

Получените два алтернативни реда с реални членове, които представляват реалната и имагинерна част на разглеждания ред, са сходящи според критерия на Лайбниц. Следователно разглежданият в задачата ред е условно сходящ.

(*Критерий на Лайбниц*: Алтернативният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, $u_n > 0$, е сходящ, ако $u_n \geq u_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.)

4) $z_n = \dfrac{(2in)^n}{n!}$.

Решение: $|z_n| = \dfrac{(2n)^n}{n!}$. Прилага се критерият на Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)]^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(2n)^n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2e > 1,$$

т.е. $|z_n| \not\to 0$. Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)^n}{n!}$ е разходящ.

Но в този случай и редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2in)^n}{n!}$ е разходящ.

5) $z_n = \dfrac{i^n}{n2^n}$ **отг.** абс. сх.

6) $z_n = \dfrac{(4i)^n (n+2^n)}{3^n}$ **отг.** разх.

7) $z_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + \dfrac{i}{n^2}$ **отг.** усл. сх.

8) $z_n = (-1)^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{i}{\sqrt[3]{n}}\right)$ **отг.** усл. сх.

9) $z_n = \dfrac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{n^2}$ **отг.** абс. сх.

10) $z_n = \dfrac{n}{(2i)^n}$ **отг.** абс. сх.

11) $z_n = \dfrac{n!}{(in)^n}$ **отг.** абс. сх.

12) $z_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n \sin in}{3^n}$ **отг.** разх.

(***Упътване***: $\sin in = i\,\mathrm{sh}\, n$.)

13) $z_n = \dfrac{n \sin in}{3^n}$ **отг.** абс. сх.

14) $z_n = e^{in}$ **отг.** разх.

15) $z_n = \dfrac{e^{in}}{n}$ **отг.** усл. сх.

(***Упътване***: Да се приложи пример 1, § 3, глава 2 $(a = e^{i},\ a \neq 1,\ |a| = 1,\ c_n = \dfrac{1}{n})$.)

16) $z_n = \dfrac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}$ **отг.** абс. сх.

17) $z_n = \dfrac{e^{in\varphi}}{n}$ **отг.** разх. за $\varphi = 2k\pi$; усл. сх. за $\varphi \neq 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

(***Упътване***: Да се използва критерият на Дирихле*) за редове с произволни знаци на членовете и задача 19 а), II, § 4, гл. 1.)

---

*) P.G.L.Dirichlet (13.02.1805-05.05.1859) – немски математик.

Критерий на Дирихле: Нека е даден числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, където $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са две редици от реални числа. Ако частичните суми B_n на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ са ограничени в съвкупност, т.е. $|B_n| \leq M$, $M > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а числата a_n образуват монотонна редица, клоняща към нула, то даденият ред е сходящ.

18) $z_n = n^{-\alpha} e^{\frac{\pi i}{n}}$ **отг.** абс. сх. за $\alpha > 1$; разх. за $\alpha \le 1$

(***Упътване***: За $n \ge 3$ са в сила неравенствата $0 < \frac{\pi}{n} \le \frac{\pi}{3}$. За редовете $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ да се приложат теоремите за сравнение.)

19) $z_n = n^{-\alpha}(\cos n + i \sin n)$

отг. абс. сх. за $\alpha > 1$; усл. сх. за $0 < \alpha \le 1$; разх. за $\alpha \le 0$

20) $z_n = \frac{\cos in}{2^n}$ **отг.** разх.

(***Упътване***: $\cos in = \operatorname{ch} n$.)

21) $z_n = \frac{i^n}{\sqrt{n}}$ **отг.** усл. сх.

22) $z_n = \frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$ **отг.** абс. сх.

23) $z_n = \frac{n}{3^n}(1+i)^n$ **отг.** абс. сх.

24) $z_n = \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$ **отг.** абс. сх.

25) $z_n = \left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$ **отг.** абс. сх.

26) $z_n = \left(\frac{i(n+i)}{2n}\right)^n$ **отг.** абс. сх.

27) $z_n = (-1)^{n-1} \dfrac{c}{n(c-n)}$ **;** $c \in \mathbb{C}$**,** $c \notin \mathbb{N}$ **отг.** абс. сх.

(***Упътване*****:** Да се използва граничната форма на теоремата за сравнение.)

28) $z_n = \dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi \mathrm{i}}{n}}{\ln n},\ n \geq 3$ **отг.** разх.

(***Упътване***. $\operatorname{ch}\dfrac{\pi i}{n} = \cos\dfrac{\pi}{n}$. Да се използва упътването към зад. 18.)

29) $z_n = \dfrac{\ln n}{\operatorname{sh}(in)}$ **отг.** разх.

(***Упътване*****:** $\operatorname{sh}(in) = i \sin n$.)

30) $z_n = \dfrac{n}{\operatorname{tg}(\pi i n)}$ **отг.** разх.

31) $z_n = \dfrac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos in}$ **отг.** абс. сх.

32) $z_n = \dfrac{\operatorname{sh}(i\sqrt{n})}{\sin in}$ **отг.** абс. сх.

33) $z_n = \dfrac{i^n}{n \ln^2 n},\ n \geq 2$ **отг.** абс. сх.

(***Упътване*****:** За реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} | z_n |$ да се приложи интегралният критерий на Коши.)

34) $z_n = \dfrac{e^{\frac{\pi i}{n}} - 1}{n^2 + 1}$ **отг.** абс. сх.

35) $z_n = 2^{-\frac{n}{2}}(1+i)^n \ln\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4n}\right)$ **отг.** разх.

§4. Функция на комплексна променлива. Граница на функция. Непрекъснатост

В този параграф се въвежда понятието функция на комплексна променлива.

Дефиниция 1. Нека E е множество от точки в комплексната равнина Z. Казва се, че в множеството E е дефинирана *функция на комплексната променлива* z, ако на всяко комплексно число $z \in E$ е съпоставено по някакво правило поне едно комплексно число w. Записва се

(1) $$w = f(z).$$

Ако на всяко $z \in E$ съответства само една стойност на w, функцията се нарича *еднозначна*, а ако на някои z съответстват повече от една стойности на w, то тя се нарича *многозначна*.

Например $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$; $w = |z|$; $w = \bar{z}$; $w = \operatorname{Re} z$; $w = \operatorname{Im} z$ са еднозначни функции, дефинирани в цялата комплексна равнина; $w = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$ е многозначна (n– значна функция), също дефинирана в цялата комплексна равнина, а функцията $w = \operatorname{Arg} z$ е многозначна (безкрайнозначна), дефинирана за всички точки от комплексната равнина Z, различни от нулата.

Нека множеството E е разположено върху реалната ос Ox; тогава $z = x$ е реална променлива. Ако всички стойности на функцията $f(z)$ са също реални, стигаме до понятието реална функция на една реална променлива като частен случай на функция на комплексна променлива.

Често се използва друг запис на функция на комплексна променлива, различен от вида (1). Ако е дадена функцията $w = f(z)$, то на всяко число $z = x + iy$ може да се съпостави числото $w = u + iv$. С други думи, на всяка двойка реални числа (x, y) може да се съпостави двойката реални числа (u, v), т.е. всяко от числата u и v се намира по двойката (x, y). А това означава, че u и v са реални функции на двете реални променливи x и y, т.е. $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Оттук

(2) $$w = u(x, y) + iv(x, y),$$

където $u(x, y) = \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} f(z)$, а $v(x, y) = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im} f(z)$.

И така от равенство (1) може да се премине към равенство (2). Този преход се нарича *отделяне на реалната и имагинерната част* на функцията $w = f(z)$.

Пример 1. Да се отделят реалната и имагинерната част на функциите:

а) $w = z^2$. Заместваме $w = u + iv$, а $z = x + iy$. Получаваме

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i.2xy.$$

Следователно $u = \operatorname{Re} w = x^2 - y^2$, а $v = \operatorname{Im} w = 2xy$.

б) $w = \dfrac{1}{z}$. Постъпвайки аналогично получаваме

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2},$$

т.е. $u = \operatorname{Re} w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, а $v = \operatorname{Im} w = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$.

Понякога е по-лесно това отделяне да се извърши като z се представи в тригонометричен вид, т.е. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Пример 2. Нека $w = z^n$, $w = u + iv$, а

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

След прилагане на формулата на Моавър се получава: $w = u + iv = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, т.е.

$$u = \operatorname{Re} w = r^n \cos n\varphi,\ v = \operatorname{Im} w = r^n \sin n\varphi.$$

Обратно, от израза (2) на функцията w може да се мине към израза (1). Обаче при това не винаги се получава функция, зависеща само от z, а най-общо казано от z и $\overline{z}$, където $\overline{z}$ е комплексно спрегнатото на z число.

Наистина от $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ следва, че $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, а $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$. Оттук

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = u\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right).$$

Пример 3. Запишете функцията $w = x^2 - y^2 + i.2xy$ като функция на променливата z и (или) $\overline{z}$.

$$w = x^2 - y^2 + i2xy = \left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \overline{z}}{2i}\right)^2 + i2\frac{z + \overline{z}}{2}\frac{z - \overline{z}}{2i} =$$

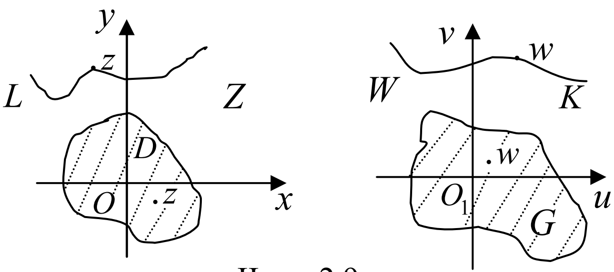
$$=\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}-\frac{z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{-4}+\frac{z^2-\overline{z}^2}{2}=$$

$$=\frac{z^2+\overline{z}^2}{2}+\frac{z^2-\overline{z}^2}{2}=z^2.$$

Сега ще дадем *геометрично тълкуване* на функция на комплексна променлива, като за удобство (за простота) ще приемем, че функцията $w=f(z)$ е дефинирана и еднозначна в E.

За функциите $y=f(x)$, разглеждани в реалния анализ, връзката между x и y се изразява геометрически така: за всяка двойка, съответстващи една на друга стойности x и y, се построява точка в равнината Oxy с декартови координати (x,y). Множеството от тези точки, най-общо казано, дава крива, която изобразява геометрично функцията $y=f(x)$.

В случая на функция на комплексна променлива $w=f(z)$, ако трябва да се постъпи аналогично, трябва да се съпостави точка за всяка двойка, съответстващи едно на друго комплексни числа z и w. Но $z=x+iy$, а $w=u+iv$, т.е. такава точка трябва да се определя от четири реални координати (x,y,u,v), при положение, че пространството е тримерно. Следователно не е възможно да се построят такива точки. Ето защо, за да се направи геометрично тълкуване на функция на комплексна променлива, се постъпва така: вземат се две равнини Oxy (или Z) и O_1uv (или W), като в равнината Z (равнината на аргумента z) се изобразяват комплексните числа $z\in E$, а в равнината W (равнината на функцията w)



Черт. 2.9

– съответстващите им комплексни числа $w = f(z)$ (черт. 2.9).

Оказва се, че задаването на функцията позволява на всяко $z \in E$ от равнината Z да се съпостави точка w от равнината W. Ако в равнината Z се вземе някаква крива L, всички точки на която принадлежат на множеството E, и за всяка точка z от кривата L се намери съответстващата й точка $w = f(z)$ от равнината W, то съвкупността K от получените точки се нарича *образ* на кривата L и се казва, че функцията $w = f(z)$ изобразява кривата L в кривата K. Аналогично, ако в равнината Z се разгледа област D, всички точки на която принадлежат на множеството E, и за всяко $z \in D$ се намери съответната точка $w = f(z)$ в равнината W, то в W се получава образът G на областта D. В случай, че функцията $w = f(z)$ е аналитична (холоморфна) (това понятие се въвежда по-нататък), кривите се изобразяват в криви, а областите – в области. Не така обаче стоят нещата ако $f(z)$ не е аналитична функция. Например функцията $w = \operatorname{Re} z$ е дефинирана в цялата комплексна равнина Z, т.е. $E = Z$, но изобразява тази равнина в реалната ос $O_1 u$ на равнината W.

Следващите примери са илюстрация на това как се получава уравнението на образа K на кривата L и как се определя образът G на областта D.

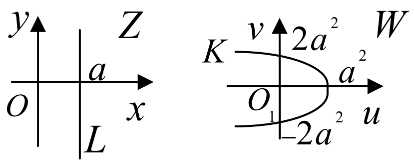
Пример 4. Да се намери в каква крива функцията $w = z^2$ изобразява правата $L \equiv x = a \quad (a > 0)$.

Решение: Като се отдели реалната и имагинерната част в $w = z^2$ се получава (пример 1 а):

(3) $$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$$

След заместване в равенства (3) параметричните уравнения на правата $L \equiv x = a$, а именно $x = a,\ y = t$, се получават параметричните уравнения на образа $K \equiv u = a^2 - t^2$, $v = 2at$.

Като се изключи параметърът t от тези равенства, т.е. след заместване на $t = \dfrac{v}{2a}$ от второто равенство в първото, се получава декартовото уравнение на кривата



Черт. 2.10

$$K \equiv u = a^2 - \frac{v^2}{(2a)^2}$$

или $v^2 = -4a^2(u - a^2)$, което е уравнение на парабола (черт. 2.10).

Пример 5. Да се намери образът G (в равнината W) на ивицата $D \equiv 1 < x < 2$ (в равнината Z) чрез функцията $w = z^2$.

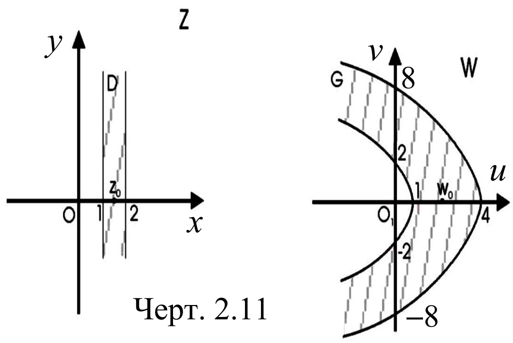
Решение: Както се вижда от пример 4, правата $L_1 \equiv x = 1\,(a = 1)$ се трансформира в параболата

$$K_1 \equiv v^2 = -4(u-1),$$

а правата $L_2 \equiv x = 2$ $(a = 2)$ - в параболата

$$K_2 \equiv v^2 = -16(u-4)$$

(черт. 2.11).



Черт. 2.11

За да се намери образът на ивицата, може да се вземе вътрешна за областта D точка, напр. точката $z_0 = 1{,}5$. Чрез $w = z^2$ тя се трансформира в точката $w_0 = 2{,}25$, която също е вътрешна за областта G. Така става ясно, че G е ивицата между двете параболи.

Дефиниция 2. (Коши) Нека функцията $f(z)$ е дефинирана в множеството E, с изключение евентуално на точка $z_0 \in E$, която е точка на сгъстяване на това множество. Казва се, че $f(z)$ има *граница* комплексното число $A \neq \infty$, когато $z \to z_0$, ако при всеки избор на $\varepsilon > 0$ съществува $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$, такова че неравенството $| f(z) - A | < \varepsilon$ е изпълнено, щом $0 < | z - z_0 | < \delta$.

Дефиниция 3. (Хайне[23]) Казва се, че функцията има *граница* числото A, когато $z \to z_0$, ако при всеки избор на редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ с граница числото z_0, редицата $f(z_1), f(z_2), ..., f(z_n), ...$ от стойностите на функцията $f(z)$ има граница числото A.

Както в реалния анализ, така и тук може да се докаже, че двете дефиниции (на Коши и Хайне) са еквивалентни.

Когато една функция има граница числото A, това се записва така: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Полезно е да се отбележи, че функция, която има крайна граница при $z \to z_0$, е ограничена в някаква околност на точката z_0, т.е. $| f(z) | \leq M$ (M е положителна константа, а z е произволна точка от тази околност).

Аналогично може да се дефинира границата $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$. Това означава, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $M(\varepsilon) > 0$, такова че при $| z | > M$ е в сила неравенството $| f(z) - A | < \varepsilon$.

---

[23] H. E. Heine (16.03.1821–21.10.1881) – немски математик.

Очевидно границата на дадена функция може и да не съществува. Например не съществуват границите $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z}$ и $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$, даже и ако z приема само реални стойности. Обаче понякога се записва условно $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ (ако за всяко число $M>0$ може да се намери такова $\delta\left(M\right)>0$, че $|f(z)|>M$, щом $0<|z-z_0|<\delta$).

Аналогично $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$, ако за всяко $M>0$ съществува число $N=N(M)>0$, такова че $|f(z)|>M$, щом $|z|>N$.

Когато става дума за разширената комплексна (Гаусова) равнина $\overline{Z}$, т.е. с добавена безкрайно отдалечената точка ∞, която се разглежда като *несобствено комплексно число* (за разлика от крайните комплексни числа, които се наричат *собствени*), вече се говори за съществуване на границата на функцията $f(z)$ при $z\to z_0(\infty)$ и в случаите, когато тази граница е равна на безкрайност. Например $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty$. Но и в тази разширена комплексна равнина $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$ не съществува, което е показано по-долу.

Често се използва понятието граница на функция по непрекъсната крива. Казва се (дефиниция 2), че $f(z)\to A$ *при* $z\to z_0$ *по кривата* L, ако условието $|f(z)-A|<\varepsilon$ при $0<|z-z_0|<\delta$ се разглежда само за точките, лежащи на кривата L. Очевидно е, че ако $f(z)\to A$ при $z\to z_0$, то $f(z)\to A$ по всяка непрекъсната крива. Ако пък по две криви функцията има различни граници или по някоя от тях въобще няма граница, то

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не съществува: ако тя би съществувала, то би съществувала и по двете криви и би била една и съща.

Нека сега разгледаме $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$. За да се покаже, че тази граница не съществува, е достатъчно да се разгледат две различни криви, по които точката z клони към нула и функцията има различни граници (или границата по някоя от кривите не съществува). Нека първо z клони към нула, движейки се по оста Ox, а после по оста Oy. Получава се:

1) $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\sin\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ – не съществува,

тъй като $\sin\frac{1}{x}$ приема всички възможни стойности между -1 и 1.

2) $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}}\sin\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{iy} = -\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{i}{y} =$

$= -\lim\limits_{y\to 0}\left(i\,\mathrm{sh}\frac{1}{y}\right) = -i\lim\limits_{y\to 0}\mathrm{sh}\frac{1}{y} = \infty$. (Използва се равенството $\sin iz = i\,\mathrm{sh} z$, което е установено в § 6). От резултатите в 1) и 2) става ясно, че границата $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$ не съществува.

Теорема 1. Ако дадена функция на комплексна променлива има граница, то имат граници както нейната реална, така и нейната имагинерна части. При това реалната част на функцията клони към реалната част на границата, а имагинерната част – към имагинерната част на границата. В сила е и обратното твърдение.

Доказателство. Нека $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=a+ib$, а $\varepsilon>0$. Тогава $f(z)-A=[u(x,y)-a]+i[v(x,y)-b]$.

Аналогично на доказателството на теорема 2 за граница на редица (§ 2) се получава

(4) $|u(x,y)-a|\le|f(z)-A|$; $|v(x,y)-b|\le|f(z)-A|$.

Затова, ако $f(z)\to A$, то $|f(z)-A|<\varepsilon$, а оттук и от (4) получаваме

(5) $|u(x,y)-a|<\varepsilon$, $|v(x,y)-b|<\varepsilon$.

Следователно $u(x,y)\to a$, а $v(x,y)\to b$.

Обратно, ако $u(x,y)\to a$ и $v(x,y)\to b$, т.е. ако са изпълнени неравенства (5), то е вярно и неравенството

$$|f(z)-A|\le|u(x,y)-a|+|v(x,y)-b|<2\varepsilon,$$

от което следва, че $f(z)\to A$.

Теоремата е доказана.

От току-що доказаната теорема 1 следва, че ако $f(z)\to A$, то $|f(z)|\to|A|$, тъй като $\big||f(z)|-|A|\big|\le|f(z)-A|$, а $\arg f(z)\to\arg A$, при условие, че $A\ne 0$ ($\arg 0$ няма смисъл); тук под аргумент разбираме неговата главна стойност.

Наистина $\arg f(z)=\operatorname{arctg}\dfrac{v(x,y)}{u(x,y)}$ (като вдясно разбираме тази стойност на аркустангенса, която принадлежи на квадранта, в който лежи точката $f(z)$). Съгласно теорема 1, от $f(z)\to A=a+ib$ следва, че $u(x,y)\to a$, а $v(x,y)\to b$. Тогава

$$\arg f(z)=\operatorname{arctg}\frac{v(x,y)}{u(x,y)}\to\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\arg A$$

поради непрекъснатостта на реалната функция $\operatorname{arctg}\varphi(x,y)$.

Теорема 2. Границата на сума, разлика, произведение и частно на две функции е равна на сумата, разликата, произведението и частното на границите на тези функции (ако границата на делителя не е нула).

Обаче трябва да се помни, че за "несобствени" граници, т.е. равни на безкрайност, теорема 2 не е вярна. Така например границата на сума не винаги е равна на сумата от границите, когато те са безкрайност: при $z \to 0$ очевидно $\frac{1}{z} \to \infty$ и $\left(1-\frac{1}{z}\right) \to \infty$, а сумата е равна на 1.

Дефиниция 4. Нека функцията $f(z)$ е дефинирана в множеството E и нека крайната (собствената) точка $z_0 \in E$ е точка на сгъстяване на това множество. Функцията $f(z)$ се нарича *непрекъсната в точка* z_0, ако $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \quad (z \in E)$.

Ако $z_0 \in E$ не е точка на сгъстяване, но $f(z)$ е дефинирана в тази точка, т.е. z_0 е изолирана точка за множеството E, то ще приемаме, че $f(z)$ е непрекъсната в точката z_0.

И тук, както при граница на функция, могат да се дадат дефинициите на Коши и Хайне, като вместо числото A в тези дефиниции се вземе $f(z_0)$, а $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$, т.е δ зависи не само от ε, но и от точката z_0. При това е в сила и тяхната еквивалентност.

Нека сега $\Delta z = z - z_0$ е нарастването на аргумента, а $\Delta w = \Delta f\left(z_0\right) = f\left(z\right) - f\left(z_0\right)$ е нарастването на функцията. Тогава непрекъснатостта на функцията $f\left(z\right)$ в точката $z = z_0$ може да се дефинира така:

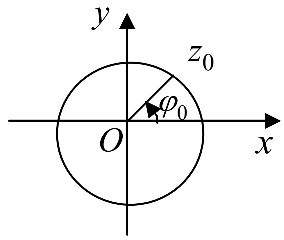
Дефиниция 5. Функцията $f(z)$ е непрекъсната в точка $z = z_0$, ако $\Delta w \to 0$, когато $\Delta z \to 0$.

Дефиниция 6. Функцията $f(z)$ се нарича *непрекъсната в безкрайно отдалечената точка* $z_0 = \infty$, ако $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = w_0$ ($w_0 \neq \infty$); числото w_0 се приема за стойност на функцията $f(z)$ в точката $z_0 = \infty$.

Дефиниция 7. Една функция $f(z)$ се нарича *непрекъсната в множеството* E, ако е непрекъсната във всяка точка от това множество. В частност, една функция се нарича *непрекъсната по линията* L, ако е непрекъсната за всяка точка z от тази линия.

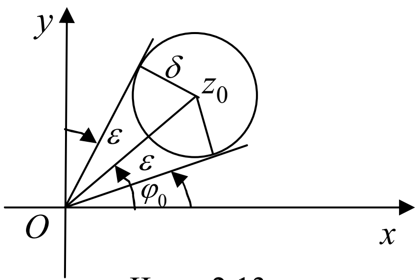
Пример 6. Да се изследва за непрекъснатост функцията $w = \operatorname{Arg} z$.

Тази функция е аргумент на числото z. Всяко крайно число $z \neq 0$ има аргумент. По такъв начин функцията $w = \operatorname{Arg} z$ е дефинирана за всяко $z \neq 0$ и $z \neq \infty$. Обаче тази функция е безкрайнозначна, тъй като едновременно със стойността φ на аргумента z могат да се вземат също и стойностите $\varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$. Ако от всевъзможните стойности на аргумента се избере произволна стойност $w_0 = \operatorname{Arg} z_0$ и се извърши положителен обход около точката 0 (черт. 2.12), започвайки от точката z_0, се достига отново в изходната точка, като стойността на аргумента се е увеличила с 2π. Обаче, ако винаги се смята, че $-\pi < \varphi \leq \pi$ и се избере определено k, което да се фиксира (после да не се изменя), то ще се отдели еднозначен клон на функцията $w = \operatorname{Arg} z$. В частност при $k = 0$ се получава така наречeният главен клон, който се означава $w = \arg z$. Главният клон е непрекъсната функция във всички точки с изключение на тези от



Черт. 2.12

отрицателната реална ос. Наистина нека $z_0 \notin \mathbb{R}^-$ и нека е зададено $\varepsilon > 0$. Да означим с δ радиуса на кръга с център в точката z_0, който не съдържа точки от отрицателната реална ос и се съдържа в сектора с големина 2ε (черт. 2.13). Тогава от неравенството $|z - z_0| < \delta$



Черт. 2.13

следва неравенството $|w - w_0| = |\arg z - \arg z_0| < \varepsilon$ Най-голямата възможна стойност на радиуса е $\delta = |z_0| \sin\varepsilon$. За точките на отрицателната реална ос $\lim\limits_{z\to z_0} \arg z = -\pi$, ако z се приближава към z_0 от долната полуравнина, и $\lim\limits_{z\to z_0} \arg z = \pi$, ако z се приближава към z_0 от горната полуравнина. Следователно тук границата даже не съществува, а поради това не може да има непрекъснатост.

Всеки друг еднозначен клон на $w = \operatorname{Arg} z$ е също непрекъсната функция на z в цялата комплексна равнина, като се изключат точките от някакъв лъч от $z = 0$ до $z = \infty$. Например за клона $0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi$ това е положителната реална ос.

Теорема 3. Ако функцията $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ е непрекъсната в точката $z_0 = x_0 + iy_0$, то и функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0). И обратно.

Доказателството е аналогично на доказателството на теорема 1.

Тази теорема дава възможност да се перифразират теоремите от реалния анализ за непрекъснати функции на две реални променливи и за функциите на комплексна променлива.

Теорема 4. Ако функциите $f_1(z)$ и $f_2(z)$ са непрекъснати в точката $z_0 \in E$ (E е дефиниционното множество и на двете функции), то в тази точка са непрекъснати и функциите $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z).f_2(z)$ и $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ при условие, че в последната от тях $f_2(z_0) \neq 0$.

Теорема 5. Нека функцията $f(z)$ е непрекъсната в точката $z_0 \in E$, а нейните стойности $w = f(z)$ запълват множеството $\mathcal{E}$, за което $w_0 = f(z_0)$ е точка на сгъстяване. Нека освен това функцията $\varphi(w)$ е дефинирана в $\mathcal{E}$ и непрекъсната в точката w_0. Тогава и съставната функция $F(z) = \varphi(f(z))$ е непрекъсната в точката z_0.

Теорема 6. Ако функцията $w = f(z)$ е непрекъсната в областта D и осъществява взаимно еднозначно изображение на областта D в множеството $\mathcal{E}$, то множеството $\mathcal{E}$ е също област и обратната функция $w = f^{-1}(z)$ е непрекъсната в $\mathcal{E}$.

Теорема 7. Ако функцията $w = f(z)$ е непрекъсната в областта D и изобразява областта D в областта G и ако функцията $\varphi(w)$ е непрекъсната в областта G, то и съставната функция $F(z) = \varphi(f(z))$ е непрекъсната в областта D.

Теорема 8. Нека функцията $f(z)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество E. Тогава съществува число $M > 0$, такова че неравенството $|f(z)| \leq M$ е в сила за всички точки на множеството E.

Теорема 9. Ако функцията $f(z)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество E, то в това множество съществува поне една точка z_0 (z_1), такава че неравенството $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $(|f(z)| \geq |f(z_1)|)$ е изпълнено за всички точки на E.

Теореми 8 и 9 са аналози на известните теореми на Вайерщрас в реалния анализ. За доказването им е достатъчно да се отбележи, че модулът на непрекъсната функция е също непрекъсната функция. Това веднага следва от неравенството: $||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|$.

Дефиниция 8. Функцията $f(z)$ се нарича *равномерно непрекъсната в* E, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta(\varepsilon) > 0$, такова че неравенството $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ е в сила за всеки две точки $z_1, z_2 \in E$, за които $|z_1 - z_2| < \delta$.

Новият момент тук в сравнение с дефиницията на Коши за непрекъснатост в точка z_0 е, че $\delta(\varepsilon)$ не зависи от избора на точките z_1 и z_2 от множеството E.

Пример 7. Да се покаже, че функцията $w = \dfrac{1}{z}$ (дефинирана за $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$) е:

а) непрекъсната в областта $0 < |z| < \infty$, но не е равномерно непрекъсната там;

б) равномерно непрекъсната в множеството $R \leq |z| < \infty$ за всяко $R > 0$.

Доказателство: а) Ясно е от условието, че функцията $w = \dfrac{1}{z}$ е непрекъсната ($z \neq 0$). За изследване на равномерната непрекъснатост в качеството на точките z_1 и z_2 от дефиниция 8 могат да се вземат $z_1 = x > 0$ и $z_2 = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Нека е зададено $\varepsilon > 0$. Търси се $\delta(\varepsilon)$, което да не зависи от z_1 и z_2 и такова, че $|w(z_1) - w(z_2)| = \left|\dfrac{1}{x} - n\right| < \varepsilon < 1$, щом $|z_1 - z_2| = \left|x - \dfrac{1}{n}\right| < \delta$. От неравенството $\left|\dfrac{1}{x} - n\right| < 1$ се получава последователно

$$-1 < \frac{1}{x} - n < 1, \qquad n - 1 < \frac{1}{x} < n + 1, \qquad \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n-1};$$

$$-\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < x - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)},$$

или окончателно $|z_1 - z_2| = \left|x - \dfrac{1}{n}\right| < \dfrac{1}{n(n-1)} = \delta$. Но оттук се вижда, че δ зависи от n, т.е. от избора на точките z_1 и z_2. Следователно $w = \dfrac{1}{z}$ не е равномерно непрекъсната в областта $0 < |z| < \infty$, макар да е непрекъсната в нея.

б) Нека сега $R \le |z| < \infty$. И нека отново е зададено $\varepsilon > 0$. Търси се $\delta(\varepsilon)$, такова че $|w(z_1) - w(z_2)| < \varepsilon$, щом $|z_1 - z_2| < \delta$ за произволни точки z_1 и z_2 от даденото множество. Но

$$|w(z_1) - w(z_2)| = \left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1||z_2|} < \frac{\delta}{R^2} < \varepsilon.$$

Следователно за δ може да се вземе число по-малко или равно на $R^2\varepsilon$, т.е. $\delta \le R^2\varepsilon$. Това δ не зависи от точките z_1 и z_2, а само от

ε. Следователно функцията $w = \dfrac{1}{z}$ е равномерно непрекъсната в множеството $R \le |z| < \infty$.

Очевидно равномерно непрекъснатите функции са и непрекъснати (достатъчно е да се фиксира една от точките, за да се установи това). Обратното обаче не винаги е вярно, т.е. не всяка непрекъсната функция е и равномерно непрекъсната (пр. 7 а)).

Както в реалния анализ и тук е в сила теорема, аналогична на теоремата на Кантор[24].

Теорема 10. Ако функцията $f(z)$ е непрекъсната в ограниченото и затворено множество E, то тя е и равномерно непрекъсната в това множество.

Накрая ще отбележим, че *точка на прекъсване* на функцията $f(z)$ се нарича такава точка, в която се нарушава непрекъснатостта на функцията. От теорема 2 следва, че сумата (разликата може да се разглежда като сума на две функции, едната от които е взета със знак минус) и произведението на две или повече функции могат да имат за точки на прекъсване само точките на прекъсване на събираемите или множителите, а точките на прекъсване на частно на две функции са точките на прекъсване на числителя и знаменателя. За точките, които анулират знаменателя, частното не е дефинирано. Например функцията $w = e^{\frac{1}{z-2}} \dfrac{z(z+5)}{z^2+1} - 8\dfrac{\sin\frac{1}{z+1}}{z+3}$ не е дефинирана за $z = 2; \pm i; -1; -3$, но е непрекъсната в цялото си дефиниционно множество.

[24] G. Cantor (03.03.1845–06.01.1918) – немски математик.

Задачи

I. Да се намери множеството E на всички комплексни числа, за които е дефинирана функцията:

1) $w = z + \dfrac{1}{z}$ **отг.** $E \equiv \{z : z \in \mathbb{C}, z \neq 0\}$

2) $w = z^2 + \dfrac{z-1}{z(z+3)}$ **отг.** $E \equiv \{z : z \in \mathbb{C}, z \neq 0, z \neq -3\}$

3) $w = \dfrac{z}{z^4+4} - \dfrac{1}{z} e^{\frac{1}{z-1}}$ **отг.** $E \equiv \mathbb{C} \setminus \{0; 1; 1 \pm i; -1 \pm i\}$

4) $w = \dfrac{z+1}{z - \sqrt[3]{3z+2}}$ **отг.** $E \equiv \mathbb{C} \setminus \{-1; 2\}$

5) $w = \dfrac{z}{z^4 - 1}$ **отг.** $E \equiv \mathbb{C} \setminus \{\pm 1; \pm i\}$

6) $w = \dfrac{3z+2}{z^3 + i}$ **отг.** $E \equiv \mathbb{C} \setminus \left\{ i; \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2} \right\}$

7) $w = \dfrac{(z+3)\cos\dfrac{1}{z-1}}{z\left(z^2 + 2z - 2 - 4i\right)}$ **отг.** $E \equiv \mathbb{C} \setminus \left\{0; 1; 1+i; -3-i\right\}$

II. Да се пресметнат стойностите на функцията $w = f(z)$ в изброените точки и да се посочи кои функции са еднозначни и кои многозначни:

1) $w = z^2 - z$ при $z = 1; 2; 1-i; -2+3i$

отг. еднозначна; $w = 0; 2; -1-i; -3-15i$

2) $w = x - y + i(x^2 - y^2)$ при $z = -1; i; 2+i$

отг. еднозначна; $w=-1+i;-1-i;1+3i$

3) $w=\dfrac{1}{z+i}$ при $z=0;-2i;1-i;1-2i$

отг. еднозначна; $w=-i;i;1;\dfrac{1+i}{2}$

4) $w=\dfrac{x+iy}{x+y+2}$ при $z=1+i;-1+i;-2-i$

отг. еднозначна; $w=\dfrac{1+i}{4};\dfrac{-1+i}{2};2+i$

5) $w=|z|+\operatorname{Re}z$ при $z=1-i;1;-i$

отг. еднозначна**;** $w=1+\sqrt{2};2;1$

6) $w=\dfrac{\sqrt[3]{z}-1}{z}$ при $z=1+i;1;-i$

отг. тризначна;

$$w_{1,2}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left(\pm\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}+i(\sqrt[3]{2}-1)\right),\ w_3=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}(1+\sqrt[3]{4});$$

$$w_1=0,\ w_{2,3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\pm i\right);w_1=-1-i,\ w_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\mp 2}{2}i$$

(***Упътване*:** Да се представи w във вида: $w=\dfrac{1}{\sqrt[3]{z^2}}-\dfrac{1}{z}$.)

7) $w=\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1}$ при $z=i;0$ **отг.** четиризначна;

$$\begin{cases} w_{1,2}=\pm\left(1+i\right)\sqrt{\sqrt{2}+1} \\ w_{3,4}=\pm\left(1-i\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{cases};\qquad \begin{cases} w_{1,2}=1\pm i \\ w_{3,4}=-1\pm i \end{cases}$$

(***Упътване:*** За оформяне на отговора при $z=i$ да се използва равенството $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.)

8) $w=x^2-y+i\left(x^2+y^2\right)$ при $z=1+i;1;i$

отг. еднозначна**;** $w=2i;1+i;-1+i$

9) $w=\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}$ при $z=i$ **отг.** шестзначна;

$$w_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\pm\sqrt{2}+1}{2};\ w_{3,4}=\frac{\pm\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}+i\frac{\pm\sqrt{2}+1}{2};$$

$$w_{5,6}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$ (комбинират се само + с + и $-$ с $-$.)

10) $w=\bar{z}+|z|$ при $z=1;-2i$

отг. еднозначна; $w=2;w=2+2i$

11) $w=\arg z$ при $z=2;\sqrt{3}-i$

отг. еднозначна; $w=0;\dfrac{11\pi}{6}$ (или $-\dfrac{\pi}{6}$)

12) $w=\operatorname{Re} z$ при $z=-3+i;8+3i$

отг. еднозначна**;** $w=-3;8$

III. Да се запише функцията $w=f(z)$ във вида $w=u(x,y)+iv(x,y)$, т.е. с отделни Re и Im части:

1) $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ **отг.** $w=\dfrac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+i\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}$

2) $w=z^3$ **отг.** $w=x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3\right)$

3) $w = z - \dfrac{1}{z}$ **отг.** $w = x - \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$

4) $w = z^5 + z^{-5}$

отг. $w = \left(r^5 + r^{-5}\right)\cos 5\varphi + i\left(r^5 - r^{-5}\right)\sin 5\varphi$

(***Упътване***: Да се запише z в тригонометричен вид.)

5) $w = z^3 - i\bar{z}$

отг. $w = x^3 - 3xy^2 - y + i\left(3x^2 y - x - y^3\right)$

6) $w = \bar{z} - iz^2$ **отг.** $w = x + 2xy + i\left(y^2 - x^2 - y\right)$

7) $w = \bar{z}^2 + i$ **отг.** $w = x^2 - y^2 + i(1 - 2xy)$

8) $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$ **отг.** $w = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

9) $w = i - z^3$ **отг.** $w = 3xy^2 - x^3 + i\left(y^3 - 3x^2 y + 1\right)$

10) $w = \dfrac{1 + iz}{1 + \bar{z}}$ **отг.** $w = \dfrac{x - 2xy - y + 1}{(x+1)^2 + y^2} + i\dfrac{x^2 - y^2 + x + y}{(x+1)^2 + y^2}$

11) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$ **отг.** $w = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-2xy}{x^2 + y^2}$

IV. Да се изразят чрез z и $\bar{z}$ функциите:

1) $w = x - 2y + i(2x + y)$ **отг.** $w = (1 + 2i)z$

2) $w = x + 3y - i(x - y)$ **отг.** $w = (1 - 2i)z + i\bar{z}$

3) $w = x^2 - 1$ **отг.** $w = \dfrac{\left(z + \bar{z}\right)^2}{4} - 1$

4) $w = x^2 - y^2 + 3x + y + i(2xy + 3y - x + 1)$

отг. $w=z^2+(3-i)z+i$

5) $w=x^3-3xy^2-2x+i\left(1-3x^2y+y^3-2y\right)$

отг. $w=\overline{z}^{\,3}-2z+i$

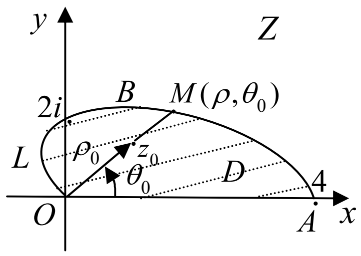
6) $w=\dfrac{x^3-3xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+i\left[\dfrac{y^3-3x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+x^2+y^2\right]$ **отг.** $w=\dfrac{\overline{z}}{z^2}+iz\overline{z}$

7) $w=x^3+xy^2-\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\left(x^2y+y^3+\dfrac{y}{x^2+y^2}+1\right)$

отг. $w=z^2\overline{z}-\dfrac{1}{z}+i$

V. Да се извършат трансформациите на дадените криви L и области D чрез посочените функции w:

1) В равнината Z е дадена областта D, заградена от контура $OABO$ (черт. 2.14), състоящ се от отсечката *OA* от реалната ос *Ox* и дъгата *ABO* от кардиоидата $L \equiv \rho = 2(1+\cos\theta)$. Да се намери образът на областта D чрез функцията $w=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\times\left(\cos\dfrac{\arg z+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{\arg z+2k\pi}{2}\right)$ $(k=0,1)$ при $k=0$.



Черт. 2.14

Решение: Кардиоидата е дадена с полярното си уравнение: $\rho=2(1+\cos\theta)$, $0\le\theta\le\pi$, където $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$. Тогава $z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}$. Следователно

$$\textbf{(6)} \qquad w = \sqrt{z} = \sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Ясно е, че тази функция изобразява горната полуравнина Z ($0 \le \theta \le \pi$) в първи квадрант на равнината W $\left(0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{2}\right)$. Следователно търсената област лежи в първи квадрант.

Образът на отсечката OA от оста Ox $\left(\theta = 0,\ \rho \in [0,4]\right)$ в равнината W е отсечката O_1A_1 от оста O_1u. Наистина $w = u + iv = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\rho}$, т.е. $u = \sqrt{\rho}$, а $v = 0$. И тъй като $0 \le \rho \le 4$, то $0 \le u \le 2$. Следователно $O(0,0) \to O_1(0,0)$, а $A(4,0) \to A_1(2,0)$.

Дъгата ABO от кардиоидата L, за която $\rho = 2(1+\cos\theta)$ ($0 \le \theta \le \pi$) се трансформира в дъгата $A_1B_1O_1$, за която от (6) имаме

$$u = \sqrt{\rho}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2(1+\cos\theta)}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta$$

$$v = \sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{2(1+\cos\theta)}\sin\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta$$

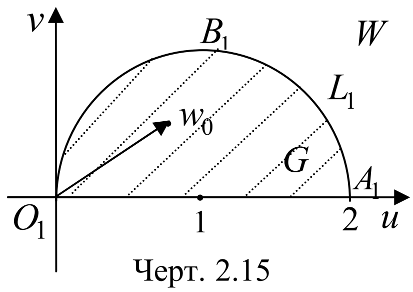
или $u - 1 = \cos\theta$, $v = \sin\theta$, откъдето $(u-1)^2 + v^2 = 1$, т.е. получава се уравнение на окръжност с център в точката $(1,0)$ и радиус 1. По-точно образът на дъгата ABO от кардиоидата L е полуокръжност, която се намира в първи квадрант на W.

Следователно с помощта на функцията $w = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ контурът $OABO$ от равнината Z се трансформира в контура $O_1A_1B_1O_1$, състоящ се от полуокръжността $(u-1)^2 + v^2 = 1$ в първи квадрант и отсечката O_1A_1, която съединява $O_1(0,0)$ и $A_1(2,0)$ (черт. 2.15).

Нека сега точката $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ е вътрешна за областта D. Тъй като за нея

$$\rho_0 < \rho = 2(1+\cos\theta),$$

то съответната ѝ точка $w_0 = u_0 + iv_0$ в равнината W е с координати:



Черт. 2.15

$$u_0 = \sqrt{\rho_0}\cos\frac{\theta_0}{2} < 1+\cos\theta_0,\ v_0 = \sqrt{\rho_0}\sin\frac{\theta_0}{2} < \sin\theta_0.$$

Оттук се вижда, че $(u_0 - 1)^2 + v_0{}^2 < 1$, т.е. точката (u_0, v_0) лежи вътре в полукръга G (защрихованата част на черт. 2.15).

И така образът на областта D е получената област G, като контура на D се трансформира в контура на G.

2) $L \equiv x + y = 1$

а) $w = \frac{1}{z}$ **отг.** окръжност $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

б) $w = z^2$ **отг.** парабола $v = \frac{1-u^2}{2}$

(***Упътване***: Да се изключат x и y от равенствата $x + y = 1;\ u = x^2 - y^2;\ v = 2xy$.)

3) $L \equiv |z| = 1$, $w = z^2$

отг. окръжност $u^2 + v^2 = 1$, описана два пъти в положителна посока, тъй като $\arg w = 2\arg z$

4) $L \equiv |z| = R$, $w = \frac{z}{\overline{z}}$

отг. окръжност $u^2 + v^2 = 1$, описана два пъти в полож. посока

5) $L \equiv \arg z^2 = -\frac{\pi}{2}$, $w = \frac{1}{z}$

отг. Лъч по ъглополовящата на I квадрант $(v = u)$ от ∞ до 0

6) $L_1 \equiv y = 0$ и $L_2 \equiv x = 0$, $w = \frac{z+1}{z-1}$

отг. $K_1 \equiv v = 0$ (оста Ou), описана от 1 до $-\infty$ и от $+\infty$ до 1 (без 1); $K_2 \equiv u^2 + v^2 = 1$

7) $D \equiv 1 \le x \le 2$ (ивица), $w = \frac{1}{z}$

отг. $G \equiv \begin{cases} \left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + v^2 \ge \frac{1}{16} \\ \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \le \frac{1}{4} \end{cases}$

8) $D \equiv \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$ (квадрат), $w = \frac{1}{z}$

отг. $G \equiv \begin{cases} \left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + v^2 \ge \frac{1}{16} \\ \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \le \frac{1}{4} \\ u^2 + \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 \ge \frac{1}{16} \\ u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \end{cases}$

VI. Да се пресметнат границите:

1) $\lim\limits_{z \to -1+i} \frac{z}{z+1}$ **отг.** $1 + i$

2) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2}{z-i}$ **отг.** ∞

3) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z-2i}{z+i}$ **отг.** 1

4) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z-2i}$ **отг.** ∞

5) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\overline{z}}$ **отг.** не съществува

6) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{\operatorname{Im} z}$ **отг.** не съществува

(***Упътване***: Да се пресметне напр. границата по правата $y=x$ и по параболата $y=x^2$.)

7) $\lim\limits_{z\to 1+2i}|z^2-1|$ **отг.** $4\sqrt{2}$

8) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^4-1}$ **отг.** $-\dfrac{1}{2}$

9) $\lim\limits_{z\to 4i}\dfrac{z^2+16}{z-4i}$ **отг.** $8i$

§5. Функционни редици и редове. Степенни редове

Да разгледаме функционната редица

(1) $$\left\{f_n(z)\right\}_{n=1}^{\infty}:\ f_1(z),\ f_2(z),\ldots,\ f_n(z),\ldots,$$

където $f_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, са функции на комплексната променлива $z=x+iy$, дефинирани в някаква област D.

Дефиниция 1. Нека за $\forall z\in D$ редицата (1) има крайна граница (при фиксирано z тази редица се обръща в числова редица с комплексни членове). Тъй като тази граница е напълно определена от стойността на $z\in D$, то тя представлява функция $f(z)$, дефинирана в областта D:

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Функцията $f(z)$ $\left(f(z)\neq\infty\right)$ се нарича *гранична функция* (или просто *граница*) на редицата (1) и се казва, че редицата (1) е *сходяща* към функцията $f(z)$ в областта D.

Може да се даде и друга дефиниция за сходимост на редицата (1) към функцията $f(z)$.

Дефиниция 2. Редицата (1), дефинирана в областта D, е *сходяща* към функцията $f(z)$, ако за произволно $\varepsilon>0$ и за произволно $z\in D$ съществува номер $N=N(\varepsilon,z)$, зависещ от ε и от точката z, такъв че за $\forall n>N$ се изпълнява неравенството

$$\left|f(z)-f_n(z)\right|<\varepsilon.$$

Обръщаме внимание на следното: при едно и също $\varepsilon>0$ номерът N, за който става дума в дефиниция 2, може да бъде различен за различни точки z от областта D.

Дефиниция 3. Редицата (1) се нарича *равномерно сходяща* в областта D към функцията $f(z)$, ако за всяко число $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N=N(\varepsilon)$, зависещ само от ε (но не и от точката z), такъв че за произволно $z\in D$ да е изпълнено неравенството

$$\left|f(z)-f_n(z)\right|<\varepsilon.$$

Ако редицата (1) е равномерно сходяща към функцията $f(z)$ в областта D, то тя е и сходяща към функцията $f(z)$. Обратното не винаги е вярно. Съществуват редици $\{f_n(z)\}$, които са сходящи в областта D към някаква функция $f(z)$, но за тях дефиниция 3 за равномерна сходимост не се изпълнява. За такива редици се казва, че са *неравномерно сходящи* в областта D.

Пример 1. Да разгледаме редицата $\{f_n(z)\}$, където

$$f_n(z)=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},\ n=0,1,2,\dots,\ |z|<1.$$

Ясно е, че $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}=\dfrac{1}{1-z}$, тъй като $|z|<1$ и $z^{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}0$. Следователно редицата $\{f_n(z)\}$ е сходяща в кръга $D\equiv|z|<1$. Ще докажем обаче, че в този кръг тя е неравномерно сходяща.

Допускаме противното, т.е. че редицата е равномерно сходяща към $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ в $D\equiv|z|<1$. Тогава от дефиниция 3 следва, че за $\forall\varepsilon>0$ съществува номер $N=N(\varepsilon)$, такъв че за всяко $n>N(\varepsilon)$ се изпълнява неравенството $\left|\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|=\dfrac{|z|^{n+1}}{|1-z|}<\varepsilon$ за $\forall z$, за които $|z|<1$. В частност при $\varepsilon=1$ за всички реални $z=x,\ 0\le x<1$, е в сила неравенството:

$\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|<1, \quad n=1,2,3,...$. Ще отбележим, че $\lim\limits_{x\to 1}\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|=\infty$, $n=1,2,3,\ldots$, което противоречи на горното неравенство.

Следователно направеното предположение за равномерна сходимост на разглежданата редица $\{f_n(z)\}$ в кръга $D\equiv|z|<1$ е невярно, т.е. тя не е равномерно сходяща към функцията $f(z)=\frac{1}{1-z}$ в този кръг.

Обаче дадената редица е равномерно сходяща във всеки затворен кръг $|z|\le R<1$. Наистина за $\forall z$, което удовлетворява неравенството $|z|\le R<1$ имаме:

$\left|\frac{1}{1-z}-\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|=\frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}\le\frac{R^{n+1}}{1-R}$, тъй като $|1-z|\ge 1-|z|\ge 1-R$ или $\frac{1}{|1-z|}\le\frac{1}{1-R}$.

Нека сега ε е произволно положително число. Тогава, решавайки неравенството $\frac{R^{n+1}}{1-R}<\varepsilon \quad (0<R<1)$ относно n, получаваме

$$(n+1)\ln R<\ln\left[\varepsilon(1-R)\right] \text{ или } n>\frac{\ln\left[\varepsilon(1-R)\right]}{\ln R}-1.$$

Тогава в качеството на $N=N(\varepsilon)$ можем да вземем цялата част на $\frac{\ln\left[\varepsilon(1-R)\right]}{\ln R}-1$, т.е. $N=\left[\frac{\ln\left[\varepsilon(1-R)\right]}{\ln R}-1\right]$ (вижте задача 1), I, § 2). Получаваме, че за $\forall n>N$ и за всички z, принадлежащи на затворения кръг $|z|\le R$ е в сила неравенството

$\left|\frac{1}{1-z}-\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|<\varepsilon$, което доказва равномерната сходимост на разглежданата редица в кръга $|z| \leq R<1$.

Дефиниция 4. Редицата $\left\{f_n(z)\right\}$ се нарича *равномерно сходяща* към функцията $f(z)$ *върху кривата* L, ако за $\forall \varepsilon>0$ може да се намери номер $N=N(\varepsilon)$, зависещ само от ε, такъв че за $n>N$ и за произволна точка $z \in L$ се изпълнява неравенството $\left|f(z)-f_n(z)\right|<\varepsilon$.

Теорема 1. Ако всички членове $f_n(z)$ на редицата (1), равномерно сходяща в областта D (върху кривата L) към функцията $f(z)$, умножим с една и съща ограничена по модул функция $\varphi(z)$, то получената редица $\left\{\varphi(z).f_n(z)\right\}$ също ще бъде равномерно сходяща в областта D (върху кривата L) към функцията $\varphi(z).f(z)$.

Доказателство: Нека $\varepsilon>0$ и нека за $\forall z \in D\ (z \in L)$ имаме $|\varphi(z)| \leq M$, $M>0$, $M=const$. Тъй като $\left\{f_n(z)\right\}$е равномерно сходяща в областта D (върху кривата L), то за произволно предварително зададено $\varepsilon>0$ съществува номер $N=N(\varepsilon)$, такъв че при $n>N$ е в сила неравенството

$$\left|f(z)-f_n(z)\right|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогава за редицата $\left\{\varphi(z).f_n(z)\right\}$ при $n>N$ и произволно $z \in D\ (z \in L)$ имаме

$$\left|\varphi(z)f(z)-\varphi(z)f_n(z)\right|=\left|\varphi(z)\right|\left|f(z)-f_n(z)\right|<M\,\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$
което доказва теоремата.

Теорема 2. Ако всички членове на редицата $\{f_n(z)\}$ са непрекъснати функции в областта D (върху кривата L) и тази редица е равномерно сходяща в D (върху L) към функцията $f(z)$, то функцията $f(z)$ е непрекъсната в областта D (върху кривата L).

Доказателство: Нека $\varepsilon>0$, z_0 е произволна фиксирана точка от областта D (на кривата L) и h е такова нарастване на z_0, че точката $z=z_0+h$ принадлежи на D (лежи върху L). Тогава

(2)
$$\left|f(z_0+h)-f(z_0)\right|=\left|f(z)-f(z_0)\right|=$$
$$=\left|\left[f(z)-f_n(z)\right]+\left[f_n(z)-f_n(z_0)\right]+\left[f_n(z_0)-f(z_0)\right]\right|\leq$$
$$\leq\left|f(z)-f_n(z)\right|+\left|f_n(z)-f_n(z_0)\right|+\left|f_n(z_0)-f(z_0)\right|.$$

Тъй като по условие редицата $\{f_n(z)\}$ е равномерно сходяща към $f(z)$, то на даденото $\varepsilon>0$ отговаря номер $N=N(\varepsilon)$, такъв че при $n>N$ и за произволни $z\in D\ (z\in L)$ са в сила неравенствата

(3)
$$\left|f(z)-f_n(z)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{и}\quad\left|f_n(z_0)-f(z_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Фиксираме кой да е номер $n>N$. Тъй като функцията $f_n(z)$ е непрекъсната в областта D (върху кривата L), то за точката z_0 по зададеното $\varepsilon>0$ може да се намери такова число $\delta=\delta(\varepsilon,z_0)>0$, че при $|h|=\left|z-z_0\right|<\delta$ се изпълнява неравенството

(4) $$\left|f_n(z)-f_n(z_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Вземайки под внимание неравенства (3) и (4), можем да запишем неравенство (2) във вида $\left|f(z_0+h)-f(z_0)\right|<\varepsilon$ при $|h|<\delta$, с което е доказана непрекъснатостта на функцията $f(z)$ в точката $z_0\in D$ $(z_0\in L)$. Но z_0 е произволна точка от D (на L), от което следва, че $f(z)$ е непрекъсната в D (върху L).

Теорема 3. (*Критерий на Коши – необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост*) За равномерната сходимост на функционната редица $\{f_n(z)\}$ в областта D (върху кривата L) е необходимо и достатъчно за $\forall\varepsilon>0$ да съществува номер $N=N(\varepsilon)$, такъв че при $n>N$ неравенството

(5) $$\left|f_{n+p}(z)-f_n(z)\right|<\varepsilon$$

да е изпълнено за всяко естествено число p $(p=1,2,\ldots,$ т.е. $p\in\mathbb{N})$ и във всички точки от областта D (на кривата L).

Доказателство: *Необходимост*: Нека $\varepsilon>0$ и редицата $\{f_n(z)\}$ е равномерно сходяща в областта D (върху кривата L). Да означим границата на тази редица с $f(z)$: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)=f(z)$ (равномерната сходимост се означава така: $f_n(z)\rightrightarrows f(z)$). Тогава от равномерната сходимост на редицата $\{f_n(z)\}$ следва, че за $\forall\varepsilon$ съществува номер $N=N(\varepsilon)$, такъв че за $\forall z\in D$ $(\forall z\in L)$ са в сила неравенствата

$$\left|f(z)-f_n(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{и}\quad\left|f(z)-f_{n+p}(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при $n>N$ и произволно $p\in\mathbb{N}$. Следователно

$$\left|f_{n+p}(z)-f_n(z)\right| \le \left|f_{n+p}(z)-f(z)\right|+\left|f(z)-f_n(z)\right|<\varepsilon$$

при $n>N$, произволно $p\in\mathbb{N}$ и за $\forall z\in D$ $\left(\forall z\in L\right)$, с което необходимостта в критерия на Коши е доказана.

Достатъчност: Нека условието (5) в критерия на Коши се изпълнява. Фиксираме произволно $z_0\in D\left(z_0\in L\right)$. Тогава редицата $\left\{f_n\left(z_0\right)\right\}$е вече числова редица, за която се изпълнява условието (5) в критерия на Коши. Следователно за редицата $\left\{f_n\left(z_0\right)\right\}$ съществува крайна граница, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(z_0\right)=f\left(z_0\right)$. Но z_0 е произволна точка от областта D (на кривата L). Следователно за $\forall z\in D$ $\left(\forall z\in L\right)$ имаме:

(6) $$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z).$$

Ще покажем сега, че редицата е равномерно сходяща в D (върху L) към функцията $f(z)$. Редицата $\left\{f_n(z)\right\}$ притежава следното свойство: съществува номер $N=N(\varepsilon)$, такъв че за $n>N$ и $\forall p=1,2,\ldots$ е в сила неравенството

(7) $$\left|f_{n+p}(z)-f_n(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ за } \forall z\in D \ \left(\forall z\in L\right).$$

Фиксирайки сега в неравенство (7) произволна точка $z\in D$ $\left(z\in L\right)$, произволен номер $n>N$, минавайки към граничен преход при $p\to\infty$ и отчитайки (6), получаваме

(8) $$\left|f(z)-f_n(z)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

при $n>N$ и $\forall z\in D$ $\left(\forall z\in L\right)$. Тъй като z е произволна точка от D (на L) и n е произволен номер, удовлетворяващ неравенството $n>N$, то неравенство (8) означава, че редицата $\left\{f_n(z)\right\}$ е равномерно сходяща към функцията $f(z)$ в областта D (върху кривата L).

С това теоремата е доказана.

Нека сега да разгледаме функционния ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots, \tag{9}$$

където $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, са функции на комплексната променлива $z = x + iy$, дефинирани в някаква област D (върху кривата L).

Дефиниция 5. Редът (9) се нарича *сходящ в точката* $z_0 \in D$ $(z_0 \in L)$, ако е сходящ числовият ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$. Сумата $S(z_0)$ на този числов ред е сума и на функционния ред (9) в точката z_0, т.е. редът (9) е сходящ в $z_0 \in D$ $(z_0 \in L)$ и има сума $S(z_0)$, ако числовата редица $\{S_n(z_0)\}$, $S_n(z_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z_0)$, от неговите частични (парциални) суми е сходяща и има за граница комплексното число $S(z_0)$.

Дефиниция 6. Редът (9) е *сходящ в* D (*върху* L), ако в D (върху L), е сходяща редицата $\{S_n(z)\}$, $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$, от неговите парциални суми.

Границата $S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$ се нарича *сума* на реда (9): $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

И тук, както при числовите редове, се въвежда понятието “абсолютно сходящ функционен ред” и се доказва аналогично, че всеки абсолютно сходящ ред в област D (върху кривата L) е и просто сходящ.

За определяне областта на абсолютна сходимост на реда (9) могат да се използват критериите на Даламбер и Коши (в гранична форма). Именно, ако

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = |l(z)| \text{ или } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|} = |l(z)|,$$

то областта на абсолютна сходимост се задава с функционното неравенство $|l(z)| < 1$, а областта на разходимост – с неравенството $|l(z)| > 1$. Допълнително изследване изискват контурните точки $|l(z)| = 1$.

Дефиниция 7. Функционният ред (9) се нарича *равномерно сходящ в областта* D (върху кривата L), ако редицата $\{S_n(z)\}$ от неговите частични суми $S_n(z)$ е равномерно сходяща в D (върху L).

Може да се даде и следната еквивалентна дефиниция за равномерна сходимост на реда (9) (на езика на ε, N).

Дефиниция 8. Функционният ред (9) се нарича *равномерно сходящ в областта* D (*върху кривата* L) към функцията $S(z)$, ако за $\forall\varepsilon > 0$ може да се намери номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че при $n > N$ за всички точки $z \in D$ $(z \in L)$ е изпълнено неравенството $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, където $S_n(z)$ са частичните суми на реда (9).

Разликата $S(z)-S_n(z)=R_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ се нарича n*-ти остатък* на реда (9).

С помощта на остатъка $R_n(z)$ можем да дадем още една дефиниция за равномерна сходимост на реда (9):

Дефиниция 9. Сходящият функционен ред (9) е равномерно сходящ в областта D (върху кривата L), ако за $\forall \varepsilon > 0$ съществува номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че при $n > N$ е в сила неравенството $\left|R_n(z)\right| < \varepsilon$ за всички точки $z \in D$ $(z \in L)$.

Пример 2. Да се изследва за равномерна сходимост геометричният ред

(10) $$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots \ .$$

Решение: Да разгледаме частичните суми $S_n(z)$, $n = 0,1,2,\ldots$, на този ред:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Редицата $\{S_n(z)\}$ или $\left\{\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right\}$ в кръга $D \equiv |z| < 1$ е неравномерно сходяща (пример 1). Следователно редът (10) в този кръг е също неравномерно сходящ.

Редицата $\{S_n(z)\}$ обаче е равномерно сходяща към функцията $\dfrac{1}{1-z}$ в затворения кръг $|z| \le R < 1$. Следователно редът

(10) е също равномерно сходящ в този затворен кръг и неговата сума е $S(z) = \frac{1}{1-z}$.

С помощта на теореми 1 и 2 лесно се доказват следните теореми:

Теорема 4. Ако всички членове на функционния ред (9), равномерно сходящ в областта D (върху кривата L), се умножат с една и съща ограничена по модул функция $\varphi(z)$, дефинирана в областта D (върху кривата L), то полученият ред $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z).f_n(z)$ е равномерно сходящ в D (върху L) към функцията $\varphi(z).S(z)$.

Теорема 5. Ако всички членове на реда (9) са непрекъснати функции в областта D (върху кривата L) и редът (9) е равномерно сходящ в D (върху L), то неговата сума $S(z)$ е непрекъсната в областта D (върху кривата L).

Едно достатъчно условие за *равномерна сходимост на реда* (9) се дава от следната теорема:

Теорема 6. (*Критерий на Вайерщрас*) Нека числовият ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, ...)$, е сходящ. Ако членовете $f_n(z)$, $n = 1, 2, ...$, на функционния ред (9), разглеждан в областта D, удовлетворяват неравенството $|f_n(z)| \le a_n$, $n = 1, 2, ...$, за $\forall z \in D$, то редът (9) е равномерно (и абсолютно) сходящ в D.

Доказателство: Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то за $\varepsilon > 0$ съществува число $N = N(\varepsilon)$, такова че за $n > N$ е в сила неравенството $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Тогава

$$\left|R_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

за $\forall n > N$ и $\forall z \in D$, с което е доказана равномерната сходимост на реда (9) в областта D (дефиниция 9).

Следващата теорема дава *необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост* на реда (9).

Теорема 7. (*Критерий на Коши*) За равномерната сходимост на функционния ред (9) в областта D е необходимо и достатъчно за $\forall \varepsilon > 0$ да съществува номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че за $\forall z \in D$ (при $n > N$ и произволно $p = 1, 2, \ldots$) да е изпълнено неравенството

$$\left|S_{n+p}(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon .$$

Доказателството на тази теорема е дословно повторение на доказателството на теорема 3, като вместо функционната редица $\{f_n(z)\}$ се разглежда редицата $\{S_n(z)\}$ от частичните (парциални) суми на реда (9).

От тази теорема следва, че ред, равномерно сходящ в областта D, е сходящ във всяка точка от тази област.

Обратното не винаги е вярно, както се вижда от пример 2.

Тук ще дадем още един начин за доказателство на неравномерната сходимост на геометричния ред

$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$ от пример 2 към $\frac{1}{1-z}$ в единичния кръг $D \equiv |z| < 1$.

Както вече видяхме, този ред е сходящ в областта $D \equiv |z| < 1$, тъй като

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1-z}.$$

Но тази сходимост е неравномерна. Наистина

$$\left|S_{n+p}(z) - S_n(z)\right| = \left|z^{n+1} + z^{n+2} + \ldots + z^{n+p}\right| =$$

$$= \left|z^{n+1}\left(1 + z + \ldots + z^{p-1}\right)\right| =$$

$$= |z|^{n+1} \frac{\left|1 - z^p\right|}{\left|1 - z\right|} \geq \frac{|z|^{n+1}\left(1 - |z|^p\right)}{\left|1 - z\right|}.$$

Нека вземем произволно n и да положим $p = n,\ z_n = \frac{n}{n+1}$, $\left|z_n\right| < 1$. Тогава получаваме:

$$\left|S_{2n}(z_n) - S_n(z_n)\right| \geq \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]}{\frac{1}{n+1}} =$$

$$= n\frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty \qquad \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} e\right).$$

И така за произволно големи n съществуват такива $p\ (p = n)$ и такива точки z_n в единичния кръг, в които модулите

$\left|S_{2n}\left(z_n\right)-S_n\left(z_n\right)\right|$ са произволно големи. Оттук следва, че геометричният ред не е равномерно сходящ в единичния (отворен) кръг (нарушава се критерият на Коши – теорема 7).

Но ако разгледаме геометричния ред вътре в затворения кръг $|z| \leq 1-\delta<1,\ 0<\delta<1$, съдържащ се в единичния кръг $|z|<1$, то, както вече се убедихме (пример 2), той е равномерно сходящ.

Наистина прилагаме подобен подход както в пример 1 към по-горе полученото равенство, а именно

$$\left|S_{n+p}(z)-S_n(z)\right|=|z|^{n+1} \frac{\left|1-z^p\right|}{|1-z|}$$

и получаваме неравенството

$$\left|S_{n+p}(z)-S_n(z)\right| \leq|z|^{n+1} \frac{1+|z|^p}{1-|z|} \leq(1-\delta)^{n+1} \frac{2}{\delta} .$$

Очевидно величината $(1-\delta)^{n+1} \frac{2}{\delta} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$ може да бъде направена по-малка от ε при $n>N(\varepsilon)$.

Следователно геометричният ред е равномерно сходящ във всяко затворено множество F от точки на единичния кръг, които са изцяло вътре в този кръг.

Този резултат може да се обобщи. В сила е следната теорема:

Теорема 8. Всеки функционен ред, който е сходящ в затвореното ограничено множество F, е равномерно сходящ в него.

Като най-прост пример за функционен ред ще разгледаме *степенния ред*

(11) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n=a_0+a_1\left(z-z_0\right)+\ldots+a_n\left(z-z_0\right)^n+\ldots,$$

където z_0 и a_n, $n = 0,1,2,...$, са дадени комплексни числа, z е комплексна променлива $(z = x + iy)$, а n е неотрицателно цяло число. Ако $z_0 = 0$, то степенният ред (11) се записва така:

(12) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 ... + a_n z^n + ... \ .$$

Теорема 9. (Абел[25]) Ако степенният ред (12) е сходящ в точката $z_0 \neq 0$, то той е сходящ (и при това абсолютно) за всяко z, което удовлетворява неравенството $|z| < |z_0|$.

Доказателство: От условието на теоремата следва, че числовият ред $a_0 + a_1 z_0 + a z_0^2 ... + a_n z_0^n + ...$ е сходящ. Следователно от необходимото условие за сходимост на ред неговият общ член $a_n z_0^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тъй като променливата величина $a_n z_0^n$, $n = 0,1,2,...$, има граница, то тя е ограничена – т.е. може да се намери такова число $M > 0$, че за всички стойности на n, $n = 0,1,2,...$, да бъде изпълнено неравенството $\left|a_n z_0^n\right| \le M$.

Общият член на реда (12) се преобразува и оценява така:

$$\left|a_n z^n\right| = \left|a_n z_0{}^n \frac{z^n}{z_0{}^n}\right| = \left|a_n z_0{}^n\right| . \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Означавайки $\left|\frac{z}{z_0}\right| = q$, получаваме, че $\left|a_n z^n\right| \le M q^n$, $n = 0,1,2,...$, където $0 < q < 1$, тъй като по условие $|z| < |z_0|$.

[25] N.H.Abel (05.08.1802-06.04.1829) - норвежки математик.

И така редът (12), в който членовете са взети по абсолютна стойност, се мажорира от сходящия геометричен ред $M\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $0<q<1$. Следователно този ред е сходящ, а самият ред (12) е абсолютно сходящ.

Следствие. Ако степенният ред (12) е разходящ в точката $z=z_1$, то той е разходящ и във всяка точка z, за която $|z|>|z_1|$.

Наистина нека $|z|>|z_1|$. Ако допуснем, че в точка z редът (12) е сходящ, то съгласно теоремата на Абел, той би бил сходящ и в точка z_1, а това противоречи на условието, че в z_1 редът е разходящ.

Дефиниция 10. Числото $R\geq 0$ (не се изключва $R=\infty$) се нарича *радиус на сходимост* на реда (12), ако за $\forall z$, за което $|z|<R$, редът е абсолютно сходящ, а за $\forall z$, за което $|z|>R$, редът е разходящ.

Множеството от точки ($|z|<R$), за които редът (12) е абсолютно сходящ, се нарича негов *кръг на сходимост.*

Аналогично на реалния случай се доказва съществуването на радиус на сходимост за всеки степенен ред.

Теорема 10. Нека $R\neq 0$ е радиус на сходимост на реда (12), а R_0 е число, за което $0<R_0<R$. Тогава в кръга $|z|\leq R_0$ редът (12) е равномерно (и абсолютно) сходящ.

Доказателство: Нека z_1 е точка от кръга на сходимост $|z|<R$, лежаща извън кръга $|z|\leq R_0$. Тогава $R_0<|z_1|=\rho<R$ и следователно неравенството $\left|a_n z^n\right|\leq\left|a_n z_1{}^n\right|$ се изпълнява за всяка

точка z в кръга $|z| \leq R_0$. Но числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n z_1^n \right|$ е сходящ и по критерия на Вайерщрас (теорема 6) редът (12) е равномерно и абсолютно сходящ в кръга $|z| \leq R_0$, $R_0 < R$.

Теорема 11. Ако съществува границата $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ или $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, то радиусът на сходимост на реда (12) е $R = \frac{1}{l}$ (при това не се изключва $l = 0$ или $l = \infty$).

Доказателството следва непосредствено от критериите на Даламбер и Коши, приложени към реда (12), в който членовете са взети по абсолютна стойност.

Теорема 12. (**Коши - Адамар**[26]**)** Радиусът на сходимост на реда (12) е $R = \frac{1}{\Lambda}$, където $\Lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ [27]. Ако $\Lambda = 0$, редът (12) е абсолютно сходящ в цялата комплексна равнина; при $\Lambda = \infty$ той е сходящ само в точката $z = 0$ и разходящ за $z \neq 0$; накрая, в случая,

---

[26] J. S. Hadamard (08.12.1865-17.10.1963) - френски математик.

[27] Най-дясната (най-лявата) точка на сгъстяване на редицата $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, a_n – реални числа, се нарича *limes superior - лимес супериор* (*limes inferior - лимес инфериор)* и се означава с $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ $\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \right)$, при това $\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n$. Тези граници за редицата $\left\{a_n\right\}$ винаги съществуват, а тяхното равенство е необходимо и достатъчно условие за съществуване на граница на тази редица (в обикновения смисъл).

когато $0 < \Lambda < \infty$, той е абсолютно сходящ в кръга $|z| < \dfrac{1}{\Lambda}$ и разходящ извън този кръг, т.е. в областта $|z| > \dfrac{1}{\Lambda}$.

Пример 3. Прилагайки теорема 12, да се намери радиусът на сходимост на реда $1 + z + z^4 + z^9 + \ldots$.

Решение: За дадения степенен ред коефициентите могат да се запишат по следния начин:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ ако } n = k^2,\ k = 0,1,2,\ldots \\ 0, \text{ в останалите случаи.} \end{cases}$$

По този начин в първия случай $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, а във втория- $\sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Затова членовете на редицата $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ безброй много пъти приемат само двете стойности 0 и 1, които са и нейни точки на сгъстяване.

Следователно

$$\Lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \text{ т.е. } R = \frac{1}{\Lambda} = 1.$$

(Или директно с критерия на Коши (Даламбер), но не може да се приложи теорема 11, тъй като в дадения ред липсват безброй много степени.)

Пример 4. Да се намери радиусът на сходимост на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Решение: Прилагаме теорема 11 и получаваме, че

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

(Или директно с критерия на Даламбер.)

Ако вместо реда (12) разгледаме реда (11), т.е. реда не по степените на z, а на $\left(z - z_0\right)$, то областта на абсолютна сходимост ще бъде кръга $\left|z - z_0\right| < R$ с център в точката z_0 и радиус R - радиуса на сходимост. При това този ред е равномерно и абсолютно сходящ във всеки кръг $\left|z - z_0\right| \le R_0 < R$, а в областта $\left|z - z_0\right| > R$, т.е. извън кръга на сходимост, редът (11) е разходящ. Допълнително изследване изискват точките от самата окръжност $\left|z - z_0\right| = R$.

Представянето на функции на реална променлива със степенен ред е систематично използвано още от Нютон в края на 60-те години на 17 век. За рационалните дроби такива разложения са получавани и преди Нютон чрез деление на числителя със знаменателя.

За разлагане в степенен ред на ирационални изрази Нютон широко използва формулата на бинома с дробен показател на степента. Лайбниц често е търсел неизвестната функция, представяйки я във вид на степенен ред с неопределени коефициенти, които после определял от условието на задачата.

Разлагането на функция на комплексна променлива в степенен ред е широко използвано и от Ойлер.

Общата теория на степенните редове с произволни комплексни коефициенти е построена от норвежкия математик Абел, който доказва в частност, че тяхната област на сходимост е някакъв кръг. Абел подробно е изучил и биномния ред с комплексен показател на степента.

Задачи

I. Да се определи и начертае областта на сходимост на функционните редове:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{\left(z-1+3i\right)^n}$.

Решение: Използваме критерия на Даламбер

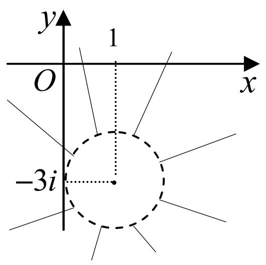
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|f_{n+1}\left(z\right)\right|}{\left|f_n\left(z\right)\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n+1\right)^2+3}{\left|z-1+3i\right|^{n+1}} . \frac{\left|z-1+3i\right|^n}{n^2+3} = \frac{1}{\left|z-1+3i\right|} < 1$$

или $\left|z-1+3i\right| > 1$. Ако $\left|z-1+3i\right| = 1$, то $\left|f_n\left(z\right)\right| = n^2+3 \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, т.е. не е изпълнено необходимото условие за сходимост на ред.

Следователно върху окръжността редът е разходящ. Тогава областта на абсолютна сходимост на изследвания ред е външността на окръжността

$$\left|z-1+3i\right| = 1$$

с център точката $z = 1-3i$ и радиус $R = 1$, т.е. множеството $\left|z-1+3i\right| > 1$ (черт. 2.16).



Черт. 2.16

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\left(n+1\right)}{\left(z+1+i\right)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z+1+i\right)^n}{5^n\left(n-i\right)}$

отг. $2 < \left| z+1+i \right| \le 5,\ z \ne 4-i$

(***Упътване***: Да се вземе сечението на областите на сходимост на двата сумарни реда.)

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$ **отг.** $|z|>\sqrt{2}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{(z+i)^n}$ **отг.** $|z+i|>e$

(***Упътване***: $\sin in = i\operatorname{sh} n$ (§ 6).)

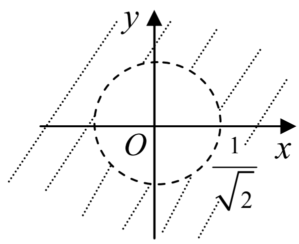
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-i)^n z^n}$

Решение: Прилагаме критерия на Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|1-i|^n|z|^n}} = \frac{1}{|1-i|.|z|} = \frac{1}{|z|\sqrt{2}} < 1$$

$$\Rightarrow |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При $|z|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ имаме $|f_n(z)|=\dfrac{1}{|1-i|^n\,\dfrac{1}{\sqrt{2^n}}}=1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.



Черт. 2.17

Следователно върху окръжността $|z|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ редът е разходящ, т.е. областта на абсолютна сходимост на разглеждания ред е $|z|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – външността на централен кръг с радиус $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (черт. 2.17).

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^n}{z^n}$ **отг.** $|z| > 2$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}$ **отг.** $|z| > \dfrac{1}{e}$

(***Упътване***: $\cos in = \operatorname{ch} n$ (§ 6).)

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(iz\right)^{-n}$ **отг.** $|z| > e$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n \left(z+1\right)^n}$ **отг.** $|z+1| > \dfrac{1}{4}$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^{-n}}{\left(z-2-i\right)^n}$ **отг.** $|z-2-i| > \dfrac{1}{2}$

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{\left(z+2i\right)^n}$ **отг.** $|z+2i| > 3$

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(z+1-i\right)^{-n}}{n+i}$ **отг.** $|z+1-i| \geq 1,\ z \neq i$

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{\left(z+1\right)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(z+1\right)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$ **отг.** разх. за $\forall z \in \mathbb{C}$

(***Упътване***: Първият ред в сумата е сходящ за $|z+1| > 1$, а вторият – за $|z+1| < 1$. Сечението на двете области е празно множество ($\varnothing$).)

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$ **отг.** $5<|z+2i|<6$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n$ **отг.** $2<|z|<4$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$

отг. $0<|z-2+i|<1$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n$ **отг.** разх. за $\forall z\in\mathbb{C}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ **отг.** $1<|z|<2$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$ **отг.** $|z-i|>e$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$ **отг.** $1\le|z|\le 2,\ z\ne 2$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(1+i)^n}$ **отг.** разх. за $\forall z\in\mathbb{C}$

22) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$ **отг.** $|z|>1$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^nz^n}\right)$ **отг.** $\frac{1}{2}<|z|<1$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^{n}$ **отг.** $|z|<1$

25) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{z\ln n}$ **отг.** $\operatorname{Re} z = x < -1$

(***Упътване*:** Първо да се провери, че за $x \geq 0$ общият член на реда не клони към 0, т.е. за $x \geq 0$ редът е разходящ. После да се положи $x = -\alpha < 0,\ \alpha > 0$ и да се използва *критерият на Раабе*[28] - *Дюамел*[29]:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|f_n(z)|}{|f_{n+1}(z)|}-1\right)=l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l>1, \text{ абс. сх.} \\ l<1, \text{ разходящ е редът } \sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(z)\right|, \text{ но редът } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \\ \text{трябва да се изследва допълнително} \\ l=1, \text{ допълнително изследване.)} \end{cases}.$$

26) **а)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$ **отг.** Оста $Ox(\mathbb{R})$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n}$ **отг.** $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\}\ (k\in\mathbb{Z})$

---

[28] J.L .Raabe (15.05.1801-12.01.1859) – швейцарски математик и физик.
[29] J. M. C. Duhamel (05.02.1797-29.04.1872) – френски математик.

(***Упътване***: За $y=0$ редовете в а) и б) са съответно Re и Im части на реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ при $|z|=1$. Последният ред е сходящ за $|z|\leq 1,\ z\neq 1$ (решения пример 1 в теоретичната част на § 3). При $y\neq 0$ общите членове и на двата реда не клонят към 0.)

27) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ **отг.** $|z|\neq 1$

(***Упътване***: За $|z|<1$ и $|z|>1$ да се използва критерият на Даламбер. За $|z|=1$ или $z=e^{i\varphi}$, $\varphi\in\mathbb{R}$, общият член на реда няма граница при $n\to\infty$, т.е. редът е разходящ.)

28) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{n!}$ **отг.** $|z|<1$

29) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$ **отг.** $|z|<1$

30) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$ **отг.** $|z|<1$

II. Да се намерят радиусите на сходимост на степенните редове:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{in}z^n$

Решение: По теорема 11 имаме:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{in}}{e^{i(n+1)}}\right|=1$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|e^{in}|}} = 1.$$

Може да се използват и директно критериите на Даламбер и Коши. Например по критерия на Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|e^{in}|.|z|^n} = |z| < 1 \Rightarrow R = 1.$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n, \, k \in \mathbb{N}$ **отг.** $R = 1$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\ln(n+2)\right]^k z^n, \; k \in \mathbb{N}$ **отг.** $R = 1$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$ **отг.** $R = 1$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}, \; \alpha > 0$ **отг.** $R = \infty$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ **отг.** $R = e$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ **отг.** $R = \frac{1}{e}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ **отг.** $R = \frac{1}{4}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$ **отг.** $R = 1$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$ **отг.** $R=\sqrt{2}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$ **отг.** $R=\infty$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(kn)!z^n}{n!(n+1)!\dots(n+k-1)!},\ k\in\mathbb{N}$ **отг.** $R=k^{-k}$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}n!e^{-n^{\alpha}}z^n,\ \alpha=const$ **отг.** $R=\infty,\ \alpha>1;\ R=0,\ \alpha\le 1$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{i}{n}z^n$ **отг.** $R=1$

(***Упътване***: $\operatorname{ch}\frac{i}{n}=\cos\frac{1}{n}$ (§ 6).)

15) $\sum_{n=0}^{\infty}i^n z^n$ **отг.** $R=1$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$ **отг.** $R=\infty$

(***Упътване***: $\ln in=\ln n+i\frac{\pi}{2}$ (§ 6).)

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi i}{n}z^n$ **отг.** $R=1$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}z^n\cos^n\frac{\pi i}{\sqrt{n}}$ **отг.** $R=1$

19) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{\sin^n(1+in)}$ **отг.** $R=\infty$

20) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n$ **отг.** $R=1$

21) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ **отг.** $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ **отг.** $R=1$

23) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ **отг.** $R=\infty$

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ **отг.** $R=0$

25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} z^n$ **отг.** $R=2$

26) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{3n} \cos in$ **отг.** $R=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

27) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n+a^n\right) z^n, \quad a \in \mathbb{C}$

отг. $R=1$, ако $|a| \le 1$; $R=\dfrac{1}{|a|}$, ако $|a|>1$

28) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{3^n}$

Решение: *I начин*: Прилагаме критерия на Коши (за този степенен ред теорема 11 е неприложима):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n z^{2n}}{3^n}\right|}=\frac{|z|^2}{3}<1\Rightarrow|z|<\sqrt{3},$$

т.е. $R=\sqrt{3}$.

II начин: Използваме формулата на Коши - Адамар (теорема 12), а именно: $\Lambda=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, а $R=\frac{1}{\Lambda}$.

За дадения степенен ред

$$a_k=\begin{cases}\frac{(-1)^n}{3^n}, & k=2n\\ 0, & k=2n-1\\ 1, & k=0\end{cases}\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Но $a_{2n}=\begin{cases}-\frac{1}{3^{2m-1}}, & n=2m-1\quad (k=4m-2)\\ \frac{1}{3^{2m}}, & n=2m\qquad (k=4m)\end{cases}\qquad (m=1,2,\ldots)$.

Следователно

$$\sqrt[k]{|a_k|}=\begin{cases}\sqrt[4m-2]{\frac{1}{3^{2m-1}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \sqrt[4m]{\frac{1}{3^{2m}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \sqrt[2n-1]{0}=0\end{cases}.$$

Членовете на редицата $\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\right\}_{k=1}^{\infty}$ безброй много пъти приемат стойностите 0 и $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ($a_0 = 1$ се среща веднъж).

Следователно $\Lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, а $R = \dfrac{1}{\Lambda} = \sqrt{3}$.

III начин: Директно

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \sqrt{3}.$$

29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} i^n n^{\ln n} z^{4n+1}$ **отг.** $R = 1$

30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ **отг.** $R = e$

31) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[3+(-1)^n\right]^n z^n$ **отг.** $R = \dfrac{1}{4}$

32) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(3+i^n\right)^n z^n$ **отг.** $R = \dfrac{1}{4}$

(***Упътване***: $i^n = ?$ при $n = 4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3$, $k = 0,1,\dots$.)

III. Радиусът на сходимост на реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е R $\left(0 < R < \infty\right)$. Да се определят радиусите на сходимост на следните редове:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n z^n,\ k \in \mathbb{N}$ **отг.** R

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n - 1\right) a_n z^n$ **отг.** $\dfrac{R}{2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ **отг.** ∞

(***Упътване***: Използвайте $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n a_n z^n$ **отг.** 0

5) $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^k z^n,\ k \in \mathbb{N}$ **отг.** R^k

6) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + z_0^n\right) a_n z^n,\ z_0 \in \mathbb{C}$

отг. R, ако $|z_0| \le 1$; $\dfrac{R}{|z_0|}$, ако $|z_0| > 1$

IV. Да се намери кръгът на абсолютна сходимост на редовете:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + ni)(z + 1 - i)^n$

Решение: *I начин*: Прилагаме критерия на Даламбер:

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left[3+(n+1)i\right](z+1-i)^{n+1}}{(3+ni)(z+1-i)^n}\right| =$$

$$= |z+1-i| \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+(n+1)^2}}{\sqrt{9+n^2}} =$$

$$= |z+1-i| \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}.\frac{\sqrt{\frac{9}{(n+1)^2}+1}}{\sqrt{\frac{9}{n^2}+1}} = |z+1-i|<1 .$$

II *начин*: Прилагаме критерия на Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|3+ni|.|z+1-i|^n} =$$

$$=|z+1-i| \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{9+n^2} =$$

$$=|z+1-i| \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.\sqrt[2n]{\frac{9}{n^2}+1} = |z+1-i| \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} =|z+1-i|<1 .$$

Остава да се провери характерът на реда при $|z+1-i|=1$, т.е. на реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3+ni)$. Този ред е разходящ, тъй като $|3+ni|=\sqrt{9+n^2} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ – не е изпълнено необходимото условие за сходимост на ред. Следователно кръгът на абсолютна сходимост е $|z+1-i|<1$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2+i\sin n\varphi\right)(z-1+2i)^n,\ \varphi\in\mathbb{R}$ **отг.** $|z-1+2i|<1$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^{3n}}{3^n+n}$ **отг.** $|z-i|<\sqrt[3]{3}$

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^{n}}{5^n-n}$ **отг.** $|z+i|<5$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-2i)^{2n}}{5^n-3^n}$ **отг.** $|z-1-2i|<\sqrt{5}$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ **отг.** $|z|\le 1$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n$ **отг.** $|z|<1$

8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}z^{3n-1}$ **отг.** $|z|<1$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2}$ **отг.** $|z|\le 1$

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{n}}{2^n}$ **отг.** $|z-i|<2$

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$ **отг.** $|z+1+i|<1$

12) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$ **отг.** $|z-2+i|<1$

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(z+1)^n$ **отг.** $|z+1|<e$

(***Упътване***: При $|z+1|=e$ общият член $|u_n| \geq \dfrac{1}{e}$, тъй като $2 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$. Или проверете, че $|u_n| \not\to 0$.)

V. Да се определи в кои точки от окръжността на кръга на сходимост са сходящи следните редове:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\sqrt{n}}$ **отг.** $|z| \leq 1$

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\ln^2 n}$ **отг.** $|z| \leq 1$

(***Упътване***: При $|z|=1$ общият член на реда е $|u_n| = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$. За да се докажете, че този ред е сходящ, да се използва интегралният критерий на Коши.)

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

Решение: В задача 8, II, радиусът на сходимост на разглеждания ред е $R=\dfrac{1}{4}$ (Проверете!). Остава да се уточни характерът му по окръжността $|z|=\dfrac{1}{4}$. За тази цел ще използваме пример 1, решен в теоретичната част на § 3. Преработваме общия член на реда:

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} (4z)^n .$$

Тогава $|4z| = |a| = 1$ при $|z| = \frac{1}{4}$, а освен това

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2 4^{n+1}} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 ,$$

т.е. $c_{n+1} < c_n$, а

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!(2n)!!}{[(2n)!!]^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 .$$

(Използвано е известното *равенство на Валис* (*Уолис*)[30] $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{n} = \sqrt{\pi}$).

Следователно според цитирания по-горе пример, редът е абсолютно сходящ за $|z| = \frac{1}{4}$, $z \neq \frac{1}{4}$ (евентуално).

С критерия на Раабе–Дюамел се получава, че даденият ред при $z = \frac{1}{4}$ е разходящ (Проверете сами!).

Следователно редът е сходящ в множеството $|z| \leq \frac{1}{4}$, $z \neq \frac{1}{4}$.

---

[30] J. Wallis (23.11.1616-28.10.1703) – английски математик.

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n} z^{3n}$ **отг.** $|z| \leq 1,\ z \neq -1;\ z \neq \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(***Упътване***: Използвайте идеята на зад. 3. За $z=-1$ и $z=\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ общият член на реда е $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$. Според интегралния критерий на Коши този ред е разходящ.)

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} e^{\frac{\pi i n^2}{2}} z^n$ **отг.** $|z| \leq 1,\ z \neq \pm 1$

(***Упътване***: За да изследвате сходимостта на реда по окръжността $|z|=1$, трябва да го запишете като сума на два реда – първия при $n=2k$, а втория – при $n=2k-1$. Използвайте пример 1, § 3.)

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^{n+1}$ **отг.** $|z| \leq 1,\ z \neq 1$

(***Упътване***: Използвайте равенството на Валис (Уолис), зад.3. При $z=1$ редът е разходящ по критерия на Раабе – Дюамел.)

7) Да се докаже, че ако е в сила неравенството $\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| \geq R\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right),\ n > n_0,\ \alpha > 1$, то степенният ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ е сходящ във всички точки на окръжността $|z|=R$ на своя кръг на сходимост.

(***Упътване***: Означете общия член на дадения степенен ред с u_n, т.е. $u_n = c_n z^n$. Тъй като R е радиусът на сходимост на дадения ред, то при $|z|=R$ имаме, че $|u_n| = |c_n| R^n$. Приложете критерия на Раабе – Дюамел за реда с общ член $|u_n|$, но не в граничната му форма.)

VI. Като се използва критерият на Вайерщрас да се докаже, че следните функционни редове са равномерно сходящи в множеството E, посочено в скобите:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{-2n} \quad \left(E \equiv |z| \geq 1\right)$.

Решение: Тъй като $|z| \geq 1$, то $\frac{1}{|z|} \leq 1$. Тогава за общия член на реда, взет по абсолютна стойност, получаваме: $\left|f_n(z)\right| = \frac{1}{n^2} |z|^{-2n} \leq \frac{1}{n^2}$. Но редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ числов ред. Следователно по критерия на Вайерщрас нашият ред е равномерно (и абсолютно) сходящ в множеството $E \equiv |z| \geq 1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-nz} \quad \left(E \equiv \operatorname{Re} z \geq \delta > 0\right)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n + z^{-n}} \quad \left(E \equiv |z| \leq \rho < \frac{1}{2}\right)$

(***Упътване***: Да се използва неравенството $|z^{2n} + 1| \geq 1 - |z|^{2n} > \frac{1}{2}$ и мажорантен геометричен ред с частно $2\rho < 1$.)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad \left(E \equiv \operatorname{Re} z \geq \delta > 1\right)$

(***Упътване***: Да се докаже, че $|n^{-iy}| = 1$, използвайки равенството $z^{\zeta} = e^{\zeta Lnz}$ (§ 6).)

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos nz \quad \left(E \equiv \left|\operatorname{Im} z\right| \le \delta < \ln 2\right)$

(***Упътване*:** Да се докаже, че $|\cos nz| \le \operatorname{ch} ny$ при $z = x + iy$, използвайки формулата $\cos\left(\alpha + \beta\right) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ и равенствата $\cos i\alpha = \operatorname{ch}\alpha, \ \sin i\alpha = i\operatorname{sh}\alpha$ (§ 6).)

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(2n-1\right)!!}{\left(n!\right)^2} \dfrac{z^n}{1+z^n} \quad \left(E \equiv |z| \le \dfrac{1}{4}\right)$

(***Упътване*:** Да се преобразува $\dfrac{z^n}{1+z^n} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{z^n}+1}$. Използвайте, че $|a+b| \ge \big||a|-|b|\big|$ и $\dfrac{1}{|z|} \ge 4$ по условие. Приложете критерия на Даламбер, за да установите характера на получения числов ред, който мажорира дадения.)

VII. Да се докаже, че:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \dfrac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}, \ r < 1$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \dfrac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}, \ r < 1$

(***Упътване*:** Да се използва сходящият геометричен ред: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}, \ |z| < 1$, в който да се запише z в тригонометричен вид: $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), r < 1$, след което да се приравнят Re и Im части от лявата и дясната страна на полученото равенство.)

§ 6. Някои елементарни функции

Тук се разглеждат някои елементарни функции, които се използват по-нататък.

1) *Полином*

Това е частен случай на степенен ред или неговата n - та парциална сума:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n ,$$

където a_k $(k = 0,1,2,\ldots,n)$ са комплексни числа.

Ако $a_n \neq 0$, неотрицателното цяло число n се нарича *степен* на този полином. При $n = 1$ получаваме

$$P_1(z) = a_0 + a_1 z .$$

Полиномът от първа степен се нарича още *линейна функция.*

Отношението $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ на полиномите $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ и $Q_m(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k z^k$ се нарича *рационална функция.*

В частност при $n = m = 1$ се получава функцията $f(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z}$, която се нарича *дробно-линейна.*

2) *Показателна функция*

Нека е даден степенният ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} . \qquad \textbf{(1)}$$

Неговият радиус на сходимост е $R=\infty$, тъй като

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следователно редът (1) е сходящ за всяко z, т.е. има сума за $\forall z$. Неговата сума се означава с e^z (по аналогия с e^x, $x\in\mathbb{R}$), т.е.

(2)
$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

и се нарича *показателна* (*експоненциална*) функция. Тя се означава още и така: $\exp(z)$.

Ясно е, че редът (1) или (2) е и абсолютно сходящ за $\forall z$. Това се отнася и за реда

$$e^{\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{n!},\ \zeta\in\mathbb{C}.$$

Тогава произведението на двата реда (2) и (3) също е абсолютно сходящ ред (теорема 4 на Коши, § 3), който има следния вид:

$$e^z\,e^{\zeta}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)\left(1+\frac{\zeta}{1!}+\frac{\zeta^2}{2!}+\ldots+\frac{\zeta^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=1.1+\left(1\frac{z}{1!}+\frac{\zeta}{1!}1\right)+\left(\frac{z^2}{2!}1+\frac{z}{1!}.\frac{\zeta}{1!}+\frac{\zeta^2}{2!}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{z^n}{n!}1+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.\frac{\zeta}{1!}+\ldots+1\frac{\zeta^n}{n!}\right)+\ldots$$

$$=1+\frac{z+\zeta}{1!}+\frac{(z+\zeta)^2}{2!}+\ldots+\frac{(z+\zeta)^n}{n!}+\ldots=e^{z+\zeta}.$$

Следователно $e^z\,e^{\zeta}=e^{z+\zeta}$.

Ако се положи $\zeta=-z$ в полученото равенство, се получава, че

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1, \text{ т.е. } e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Също така, ако положим $\zeta = -\tau$, се получава

$$e^z e^{-\tau} = e^{z-\tau} \text{ или } \frac{e^z}{e^\tau} = e^{z-\tau}.$$

Ако в e^z се замести z с $z + 2k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и се използва формулата на Ойлер, се получава

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z \left(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi \right) = e^z.$$

Това равенство показва, че функцията $f(z) = e^z$ е периодична с чисто имагинерен период $2\pi i$ (или $2k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), тъй като $f(z + 2\pi i) = f(z)$ (или $f(z + 2k\pi i) = f(z)$) (за разлика от реалната функция $y = e^x,\ x \in \mathbb{R}$, за която е добре известно, че не е периодична).

Освен това функцията e^z няма граница при $z \to \infty$ (нито крайна, нито безкрайна) за разлика от реалната функция e^x, която при $x \to +\infty$ клони към $+\infty$, а при $x \to -\infty$ клони към 0.

Наистина, ако границата $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$ би съществувала, то тя няма да зависи от пътя, по който $z \to \infty$. Нека за такъв път изберем положителната част на имагинерната ос. Тогава $z = 0 + iy = iy \to \infty$ и $e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y$ не може да има граница, тъй като реалните функции $\cos y$ и $\sin y$ нямат граници при $y \to +\infty$.

Ще добавим още, че уравнението $e^z = 0$ няма корени (както това е в сила и за $e^x = 0,\ x \in \mathbb{R}$). Наистина, полагането $z = x + iy$ води до уравнението $e^x \left(\cos y + i \sin y \right) = 0$. Но тъй като $e^x \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$ (реално), то би трябвало $\cos y + i \sin y = 0$. Но едно комплексно число е равно на нула тогава и само тогава, когато неговата Re и Im части са равни на нула. Следователно би трябвало $\cos y = 0$ и $\sin y = 0$ едновременно, което е невъзможно, тъй като $\sin^2 y + \cos^2 y = 1 > 0$.

И така $e^z \neq 0$ за $\forall z \in \mathbb{C}$.

Ако сега в (2) формално се замести z с iz, се получава

(4)
$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Лесно се намира, че радиусът на сходимост и на двата реда в дясната страна на равенство (4) е $R = \infty$, т.е. и двата реда са сходящи (и то абсолютно) за $\forall z \in \mathbb{C}$.

3) *Тригонометрични функции*

Сумите на двата реда в равенство (4) дефинират съответно функциите $\cos z$ и $\sin z$, а именно:

(5)
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

и

(6)
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Замествайки функциите от (5) и (6) в (4), получаваме *формулата на Ойлер*:

(7)
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z .$$

Известно е, че $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, където φ е реално число. Оказва се, че формулата на Ойлер е в сила и тогава, когато вместо реалното число φ стои комплексното число z.

Нека сега в (4) заместим z с $-z$. Използвайки (5) и (6), получаваме

(8) $$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \; .$$

Събирайки (7) и (8), се получава, че

(9) $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

а изваждайки от (7) равенството (8), че

(10) $$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

(Равенства (9) и (10) могат да послужат за дефиниране на тригонометричните функции $\cos z$ и $\sin z$, а от тях и от (2) да се получат равенства (5) и (6).)

Ще покажем, че много от формулите, познати ни за реалните функции $\sin x$ и $\cos x$, са в сила и за функциите $\sin z$ и $\cos z$. Например и за тях

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Наистина, замествайки тук $\sin z$ и $\cos z$ с равенства (10) и (9) съответно, се получава

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1 .$$

Аналогично чрез заместване се проверява, че са в сила събирателните формули:

$$\sin\left(z_1 \pm z_2\right) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 ;$$

$$\cos\left(z_1 \pm z_2\right) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 .$$

Ако в тях се положи $z_1 = z_2 = z$ и се използва знакът “плюс“, се получава

$$\sin 2z = 2\sin z \cos z \,, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \,.$$

От формули (9) и (10), замествайки z с $-z$, се вижда, че

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Ако сега в (9) и (10) заместим z с $z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и отчетем факта, че функцията e^z е периодична с период $2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, получаваме, че

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \qquad \sin(z + 2k\pi) = \sin z,$$

т.е. и комплексните функции $\cos z$ и $\sin z$ са периодични с период 2π (или $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

От по-горните събирателни формули се проверява, че

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos\frac{\pi}{2} - \sin z \sin\frac{\pi}{2} = -\sin z,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z \cos\frac{\pi}{2} + \sin z \sin\frac{\pi}{2} = \sin z.$$

Аналогично $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \cos z$.

Освен това решенията на тригонометричните уравнения $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ са както в реалната област.

Наистина $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$. Оттук $e^{iz} - \dfrac{1}{e^{iz}} = 0$ или $e^{2iz} = 1$. Следователно $2iz = 2k\pi i$, а $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Аналогично решенията на $\cos z = 0$ са $z = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Ще отбележим, че има и някои различия на комплексните функции $\sin z$ и $\cos z$ от реалните $\sin x$ и $\cos x$.

Известно е напр., че за реалните функции $\sin x$ и $\cos x$ са в сила неравенствата: $|\sin x| \le 1$ и $|\cos x| \le 1$. Ще докажем, че подобни неравенства за тези функции в комплексната област не са валидни. Например за $\cos z$ намираме

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right)+e^{y}\left(\cos x - i\sin x\right)\right] =$$

$$= \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x = \operatorname{ch} y\,\cos x - i\operatorname{sh} y\,\sin x\,.$$

Тогава

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y\,\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y\,\sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{\left(1+\operatorname{sh}^2 y\right)\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \underset{\substack{z\to\infty \\ (x\to\infty,\, y\to\infty)}}{\longrightarrow} \infty\,.$$

Аналогично се доказва, че $|\sin z| \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, т.е. функциите $\sin z$ и $\cos z$ не са ограничени.

И в комплексната област се въвеждат тригонометричните функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{cotg} z$, като $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $z \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, а $\operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, $z \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Използвайки формули (9) и (10), можем да запишем, че $\operatorname{tg} z = \dfrac{1}{i}.\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \dfrac{1}{i}.\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$, а $\operatorname{cotg} z = i\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\dfrac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$.

За тези две функции може да се докаже, че са периодични с период π (или $k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и че са в сила много от познатите ни тригонометрични формули. Това предоставяме да направи самият читател.

4) ***Хиперболични функции***

По дефиниция

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \ \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \ z \neq \frac{\pi i}{2}(2k+1);$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, \ z \neq k\pi i,$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Оттук имаме: $e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z$, а $e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z$. Следователно $\left(\operatorname{ch} z \pm \operatorname{sh} z\right)^n = \left(e^{\pm z}\right)^n = e^{\pm nz} = \operatorname{ch} nz \pm \operatorname{sh} nz$.

Ще покажем връзката, която съществува между тригонометричните и хиперболичните функции.

Замествайки в (9) и (10) променливата z с iz, получаваме

$$\cos iz = \frac{e^{i.iz} + e^{-i.iz}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \operatorname{ch} z;$$

$$\sin iz = \frac{e^{i.iz} - e^{-i.iz}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}\,\frac{i}{i} = i\,\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i \operatorname{sh} z.$$

Оттук веднага се получават и равенствата:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{\left(iz\right)^{2n}}{\left(2n\right)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\left(2n\right)!};$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{i} \sin iz = -i \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{\left(iz\right)^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!},$$

като редовете в тези равенства са сходящи за $\forall z \in \mathbb{C}$.

Аналогично се получават и обратните зависимости, т.е.

$$\operatorname{ch} iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z\,; \quad \operatorname{sh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} . \frac{i}{i} = i \sin z\,.$$

Освен това

$$\operatorname{tg} iz = \frac{\sin iz}{\cos iz} = \frac{i \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = i \operatorname{th} z\,;$$

$$\operatorname{cotg} iz = \frac{\cos iz}{\sin iz} = \frac{\operatorname{ch} z}{i \operatorname{sh} z} = \frac{1}{i} \operatorname{cth} z\,;$$

$$\operatorname{th} iz = \frac{\operatorname{sh} iz}{\operatorname{ch} iz} = \frac{i \sin z}{\cos z} = i \operatorname{tg} z\,;$$

$$\operatorname{cth} iz = \frac{\operatorname{ch} iz}{\operatorname{sh} iz} = \frac{\cos z}{i \sin z} = \frac{1}{i} \operatorname{cotg} z\,.$$

С непосредствена проверка се получава и основната формула, свързваща $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$, а именно

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Наистина $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = 1$.

Аналогично (със заместване) получаваме, че:

$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2\,; \quad \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z\,;$$

$$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2\,; \quad \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z\,.$$

Няма да се спираме на формулите за $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$. Оставяме това да направи читателят.

Ще отбележим още, че за разлика от реалните хиперболични функции, които не са периодични, комплексните хиперболични функции вече са периодични, като $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ имат чисто имагинерен период $2\pi i$ (или $2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ - чисто имагинерен период πi (или $k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Наистина

$$\operatorname{sh}(z+2\pi i)=\frac{1}{i}\sin i(z+2\pi i)=\frac{1}{i}\sin(iz-2\pi)=\frac{1}{i}\sin(iz)=$$

$$=\frac{1}{i}.i\operatorname{sh} z=\operatorname{sh} z.$$

Аналогично $\operatorname{ch}(z+2\pi i)=\operatorname{ch} z$; $\operatorname{th}(z+\pi i)=\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth}(z+\pi i)=\operatorname{cth} z$.

5) ***Логаритмична функция***

Дефиниция 1. *Натурален логаритъм* на комплексното число z се нарича такова комплексно число w, че

(11) $$e^w=z.$$

За да се получи формула за изчисляване на логаритъм от комплексно число, в равенство (11) се полага $w=u+iv$, а $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Получава се $e^{u+iv}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, т.е

(12) $$e^u(\cos v+i\sin v)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

След приравняване на модулите на числата, стоящи в лявата и дясната страна на равенство (12), се получава $e^u=r$ или $u=\ln r$. При това, тъй като u е реално число, под $\ln r$ трябва да се разбира реалната стойност на натуралния логаритъм от положителното число r.

По-нататък от равенство (12) се заключава, че аргументите на числата, стоящи отдясно и отляво, се различават с число, кратно на 2π, т.е. $v=\varphi+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Следователно

$$w=\operatorname{Ln} z=u+iv=\ln r+i(\varphi+2k\pi).$$

Окончателно

(13) $$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

или

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\,A\mathrm{rg}\, z\,.$$

Формула (13) може да се запише по-кратко така:

(14) $$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i\,,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

където

(15) $$\ln z = \ln|z| + i \arg z\,.$$

Замествайки $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\arg z = \operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$, се получава

(16) $$\ln z = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + i\operatorname{Arctg}\frac{y}{x},$$

където

$$\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + m\pi$$

($m = 0$ и ± 1 при $-\pi < \varphi \le \pi$ и $m = 0, 1$ и 2 при $0 \le \varphi < 2\pi$).

Натуралният логаритъм, зададен с формула (13), е дефиниран за $\forall z \in \mathbb{C}, z \ne 0$, и е многозначна функция за разлика от реалния логаритъм, който е еднозначна функция. Освен това, както се вижда от формула (14), натуралният логаритъм в комплексната област е и периодична функция, което също го различава от реалния натурален логаритъм. Натуралният логаритъм $\ln z$, записан с формула (15) или (16), се нарича *главна част* на многозначната функция $\operatorname{Ln} z$. Той е еднозначна функция, дефинирана за $\forall z \in \mathbb{C}, z \ne 0$, и е непрекъсната функция в цялата комплексна равнина Z с разрез по отрицателната ос x, ако $-\pi < \arg z \le \pi$ (съответно положителната ос x, ако $0 \le \arg z < 2\pi$) (виж пример 6, § 4, гл. II).

Ще отбележим следните *свойства на* функцията $\operatorname{Ln} z$:

а) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln}|z_1 z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 z_2) =$

$$= \operatorname{Ln}|z_1| + \operatorname{Ln}|z_2| + i\left(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2\right) =$$

$$= \left(\operatorname{Ln}|z_1| + i\operatorname{Arg} z_1\right) + \left(\operatorname{Ln}|z_2| + i\operatorname{Arg} z_2\right) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2\,.$$

Аналогично

б) $\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\operatorname{Ln}z_1-\operatorname{Ln}z_2$.

в) $\operatorname{Ln}z^{\alpha}=\alpha\operatorname{Ln}z,\ \alpha\in\mathbb{C}$.

Във всяко от тези равенства лявата и дясната страна при зададените z_1 и z_2 $\left(z_{1,2}\neq 0\right)$ изобразяват безкрайни множества от комплексни числа. Равенствата трябва да се разбират в такъв смисъл, че тези множества са еднакви, т.е., че се състоят от едни и същи числа. Забравянето на този факт може да доведе до грешки.

Известен е например следният *софизъм*, принадлежащ на Бернули[31].

Твърди се, че $\operatorname{Ln}(-z)=\operatorname{Ln}z$ за $\forall z\neq 0$.

За доказателството се разглежда следната верига от равенства:

$$
\begin{aligned}
&\alpha)\ \operatorname{Ln}\left[(-z)^2\right]=\operatorname{Ln}\left(z^2\right)\Rightarrow\\
&\Rightarrow\beta)\ \operatorname{Ln}(-z)+\operatorname{Ln}(-z)=\operatorname{Ln}z+\operatorname{Ln}z\Rightarrow\\
&\Rightarrow\gamma)\ 2\operatorname{Ln}(-z)=2\operatorname{Ln}\mathrm{z}\Rightarrow\\
&\Rightarrow\delta)\ \operatorname{Ln}(-z)=\operatorname{Ln}z.
\end{aligned}
$$

Но това заключение не е вярно, тъй като

$$\operatorname{Ln}z=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i,$$

$$\operatorname{Ln}(-z)=\ln|-z|+i\operatorname{Arg}(-z)=\ln|z|+i\arg z+(2k+1)\pi i$$

и очевидно нито едно от числата, които са стойности на $\operatorname{Ln}z$, не съвпада с нито едно от числата, които са стойности на $\operatorname{Ln}(-z)$.

Грешката в приведеното по-горе доказателство се получава при прехода от равенство $\beta)$ към равенство $\gamma)$. Първото от тях се основава на формулата в по-горния пункт $\alpha)$ и, разбира се, е вярно.

---

[31] I.Bernoulli (27.07.1667 - 01.01.1748) - швейцарски математик.

Но сумата $\operatorname{Ln}(-z)+\operatorname{Ln}(-z)$ не може да се замени с $2\operatorname{Ln}(-z)$, тъй като тази сума се получава от множеството на числата $\operatorname{Ln}(-z)$ чрез събирането на всяко от тези числа със същото или с различно от него число от това множество, докато множеството $2\operatorname{Ln}(-z)$ се получава чрез удвояване на всяко от числата $\operatorname{Ln}(-z)$, т.е. чрез събиране на такова число само със себе си. Следователно

$$\operatorname{Ln}(-z)+\operatorname{Ln}(-z)\neq 2\operatorname{Ln}(-z).$$

Аналогично и $\operatorname{Ln} z+\operatorname{Ln} z\neq 2\operatorname{Ln} z$.

Читателят може да си изясни напълно това положение, ако разгледа следния прост пример: нека A е множеството на числата 0 и 1, т.е. $A=\{0,1\}$, $A+A$ е множеството, чиито елементи са сума на елемент от A с елемент от A, а $2A$е множеството, състоящо се от удвоените елементи на A. Тогава множеството $A+A$ се състои от числата $0+0=0$, $0+1=1$ и $1+1=2$, докато множеството $2A$ се състои само от числата $2.0=0$ и $2.1=2$, т.е. $A+A=\{0, 1, 2\}$, а $2A=\{0, 2\}$. Следователно $A+A\neq 2A$.

Също така заместването $z_1=z_2=z\neq 0$ в пункт б), води до равенството:

$$\operatorname{Ln}1=\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln} z.$$

Това е вярно съотношение, но дясната му страна не може да се замени с нула, тъй като става дума за множеството на всички разлики между двойките стойности на логаритъма на едно и също число. Това множество се състои от всевъзможните кратни на числото $2\pi i$, така че в действителност имаме

$$\operatorname{Ln}1=2k\pi i,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Важно е да се подчертае, че $\operatorname{Ln} e^z=z+2k\pi i$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

6) *Степенна функция*

Равенството $e^{w}=z$ или $e^{\operatorname{Ln} z}=z$ може да послужи за дефиниране на степенната функция z^{ζ}, където z и ζ са комплексни. И така по дефиниция имаме:

$$z^{\zeta}=e^{\zeta \operatorname{Ln} z}.$$

Тази функция е многозначна, тъй като е многозначна функцията $\operatorname{Ln} z$. Главната ѝ стойност се получава като вземем главната стойност $(\ln z)$ на $\operatorname{Ln} z$.

7) *Обратни тригонометрични функции*

Дефиниция 2. *Аркуссинус* на комплексното число z $(\operatorname{Arc}\sin z)$ се нарича такова комплексно число w, че $\sin w=z$. (Аналогично за останалите тригонометрични функции.)

Изхождайки от дефиницията, може да се намери формула за изчисляване на $\operatorname{Arc}\sin z$. От $\sin w=z$ следва $z=\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$.

Полагането $e^{iw}=p$ води до $z=\dfrac{p-p^{-1}}{2i}$ или $p^2-2iz.p-1=0$. Решението на полученото квадратно уравнение е: $p_{1,2}=iz\pm\sqrt{-z^2+1}$, т.е. $e^{iw}=iz\pm\sqrt{1-z^2}$. Оттук

$$w=\operatorname{Arc}\sin z=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(iz\pm\sqrt{1-z^2}\right).$$

Тъй като $\sqrt{1-z^2}$ (изобщо корен квадратен от комплексно число, различно от нула) има винаги две стойности, които се различават по знак, то обикновено се записва

$$\operatorname{Arc}\sin z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right).$$

Аналогично се получава:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z}, \quad z \neq \pm i;$$

$$\operatorname{Arccotg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz+1}{iz-1} = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}, \quad z \neq \pm i.$$

Главните стойности на обратните тригонометрични функции се изразяват със същите формули, но вместо многозначната функция (Ln) се записва главната ѝ стойност ($\ln$).

8) ***Обратни хиперболични функции***

Тук ще дадем дефиниция на аргумент тангенс хиперболичен и ще изведем формула за неговото пресмятане. За другите хиперболични функции се постъпва аналогично.

Дефиниция 3. *Аргумент тангенс хиперболичен* на комплексното число z ($\operatorname{Argth} z$ или $\operatorname{Arth} z$) се нарича такова комплексно число w, че $\operatorname{th} w = z$.

От дефиниция 3 и формулата за $\operatorname{th} w$ чрез e^w от пункт 4) се получава $z = \operatorname{th} w = \dfrac{e^{2w}-1}{e^{2w}+1}$. Полагаме $e^{2w} = p$. Тогава $z = \dfrac{p-1}{p+1}$, откъдето $p = \dfrac{1+z}{1-z}$ или $e^{2w} = \dfrac{1+z}{1-z}$. Следователно

$$w = \operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \ z \neq \pm 1.$$

Аналогично

$$\operatorname{Argcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}, \ z \neq \pm 1;$$

$$\operatorname{Argsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right); \quad \operatorname{Argch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

И тук главните стойности на обратните хиперболични функции се изразяват със същите формули, но в тях многозначната функция (Ln) е заменена с главната ѝ стойност ($\ln$).

Теорията на елементарните функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ на комплексната променлива z е построена от Ойлер през 40-те години на 18 век и систематично е изложена от него в класическия му труд "Въведение в анализа на безкрайно малките", излязъл през 1748 г. През следващата, 1749 г., той публикува теорията на логаритъма на комплексната променлива z.

Задачи

I. Да се отделят Re и Im части в следните функции:

1) $w = z^2 \sin z$

отг. $u = \operatorname{Re} w = \left(x^2 - y^2\right)\sin x \operatorname{ch} y - 2xy \cos x \operatorname{sh} y$

$v = \operatorname{Im} w = \left(x^2 - y^2\right)\cos x \operatorname{sh} y + 2xy \sin x \operatorname{ch} y$

2) $w = \ln z + \dfrac{1}{z}$

отг. $u = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

$v = \operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

3) $w = e^{-z} + \operatorname{sh} z$

отг. $u = e^{-x}\cos y + \operatorname{sh} x \cos y$

$v = \operatorname{ch} x \sin y - e^{-x}\sin y$

4) $w = z^3 + \cos z$ **отг.** $u = x^3 - 3xy^2 + \cos x \operatorname{ch} y$

$v = 3x^2 y - y^3 - \sin x \operatorname{sh} y$

5) $w = e^{z^2} + \operatorname{ch}(z - i)$

отг. $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy + \operatorname{ch} x \cos(y-1)$

$v = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy + \operatorname{sh} x \sin(y-1)$

6) $w = \operatorname{tg} z$ **отг.** $u = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$; $v = \dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$

7) $w = 2^{z^2}$

отг. $u = e^{\left(x^2 - y^2\right)\ln 2 - 4k\pi xy} \cos\left[2k\pi\left(x^2 - y^2\right) + 2xy \ln 2\right]$

$v = e^{\left(x^2 - y^2\right)\ln 2 - 4k\pi xy} \sin\left[2k\pi\left(x^2 - y^2\right) + 2xy \ln 2\right]$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$

II. Да се запише функцията $w = u(x, y) + iv(x, y)$ като функция на z и (или) $\overline{z}$:

1) $w = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$ **отг.** $w = \operatorname{ch} z$

2) $w = e^x\left[\left(x^2 - y^2\right)\cos y - 2xy \sin y\right] + x^2 + y^2 +$

$+ie^x\left[2xy \cos y + \left(x^2 - y^2\right)\sin y\right]$ **отг.** $w = z^2 e^z + z\overline{z}$

3) $w = \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x} - i\dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}$ **отг.** $w = \operatorname{cotg} z$

4) $w = x^2 - y^2 - e^x \sin y + i\left(e^x \cos y - 2xy\right)$ **отг.** $w = \overline{z}^2 + ie^z$

5) $w = x + e^x \cos y + i\left(y - e^x \sin y\right)$ **отг.** $w = e^{\overline{z}} + z$

III. Намерете $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln|f(z)|}{y}$, $z=x+iy$, ако:

1) $f(z)=\sin z$ **отг.** 1

2) $f(z)=e^{iz^2}$ **отг.** $-2x$

3) $f(z)=e^{-2iz^2}$ **отг.** $4x$

4) $f(z)=\operatorname{tg} z$ **отг.** 0

(***Упътване***: Да се използва зад. 6, I; $|\operatorname{tg} z|=\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}2y-\cos 2x}{\operatorname{ch}2y+\cos 2x}}$.)

IV. Пресметнете:

1) $\operatorname{Ln}4$ **отг.** $2\ln 2+2k\pi i$

2) $\operatorname{Ln}(-1)$; $\ln(-1)$ **отг.** $(2k+1)\pi i$; πi

3) $\operatorname{Ln} i$; $\ln i$ **отг.** $\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$; $\dfrac{\pi i}{2}$

4) $\operatorname{Ln}\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ **отг.** $\left(2k\pm\dfrac{1}{4}\right)\pi i$

5) $\operatorname{Ln}(2-3i)$ **отг.** $\dfrac{1}{2}\ln 13+\left(2k\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right)i$

6) $\operatorname{Ln}(-2+3i)$ **отг.** $\dfrac{1}{2}\ln 13+\left[(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right]i$

7) $\operatorname{Ln}(-1-i)$ **отг.** $\dfrac{1}{2}\ln 2+\left(2k+\dfrac{5}{4}\right)\pi i$

8) $\operatorname{Ln}(-3i)$ **отг.** $\ln 3+\left(2k+\dfrac{3}{2}\right)\pi i$

9) $\mathrm{Ln}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ **отг.** $\ln 2+\left(2k+\frac{2}{3}\right)\pi i$

10) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)$ **отг.** $\ln 2+\left(2k-\frac{1}{6}\right)\pi i$

11) i^{i} **отг.** $e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$

12) $\mathrm{Ln}\, i^{i}$ **отг.** $-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+2m\pi i$

13) $i^{\frac{1}{i}}$ **отг.** $e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$

14) 1^{i} **отг.** $e^{2k\pi}$

15) 1^{-i} **отг.** $e^{2k\pi}$

16) 2^{i} **отг.** $e^{2k\pi}\left(\cos\ln 2+i\sin\ln 2\right)$

17) $(-2)^{\sqrt{2}}$ **отг.** $2^{\sqrt{2}}\left[\cos\left(2k+1\right)\pi\sqrt{2}+i\sin\left(2k+1\right)\pi\sqrt{2}\right]$

18) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$ **отг.** $e^{-\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi}$

19) $\left(3-4i\right)^{1+i}$

отг. $5e^{arctg\frac{4}{3}+2k\pi}\left[\cos\left(\ln 5-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\ln 5-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)\right]$

20) $\left(-3+4i\right)^{1+i}$

отг.

$$-5e^{\mathrm{arctg}\frac{4}{3}-(2k+1)\pi}\left[\cos\left(\ln 5-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\ln 5-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)\right]$$

21) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ **отг.** $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$

22) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{1-i}$

отг. $2e^{\frac{\pi}{3}+2k\pi}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\ln 2\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\ln 2\right)\right]$

23) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{i}$ **отг.** $e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$

24) $\left(1-i\right)^{3-3i}$

отг. $2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}+6k\pi}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3}{2}\ln 2\right)-i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3}{2}\ln 2\right)\right]$

25) $\operatorname{Arcsin} 5$ **отг.** $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln\left(5+2\sqrt{6}\right)$

26). $\operatorname{Arcsin}\dfrac{\pi i}{3}$ **отг.** $\begin{cases} 2k\pi - i\ln\dfrac{\sqrt{9+\pi^2}-\pi}{3} \\ (2k+1)\pi - i\ln\dfrac{\pi+\sqrt{9+\pi^2}}{3} \end{cases}$

27) $\operatorname{Arcsin} i$ **отг.** $\begin{cases} 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \\ (2k+1)\pi - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \end{cases}$

28) $\operatorname{Arccos}\dfrac{1}{2}$ **отг.** $\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

29) $\operatorname{Arccos} 3$ **отг.** $2k\pi\pm i\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$

30) $\mathrm{Arccos}\, i$ **отг.** $2k\pi \pm \frac{\pi}{2} - i\ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right)$

31) $\mathrm{Arctg}\left(1+i\right)$ **отг.** $-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2 + \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2} + \frac{i}{4}\ln 5$

32) $\mathrm{Arccotg}\left(1+2i\right)$ **отг.** $k\pi + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - \frac{i}{4}\ln 5$

33) $\mathrm{Argch}\ 2i$ **отг.** $\ln\left(\sqrt{5} \pm 2\right) + \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi i$

34) $\mathrm{Argth}\left(1-i\right)$ **отг.** $\frac{1}{4}\ln 5 + \frac{i}{2}\left[\mathrm{arctg}2 + \left(2k+1\right)\pi\right]$

(***Забележка***: Навсякъде в задачите от IV да се счита, че $k,\, m \in \mathbb{Z}$.)

V. Да се решат уравненията:

1) $e^z + i = 0$ **отг.** $z_k = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$

2) $e^z + 1 - i = 0$ **отг.** $z_k = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$

3) $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$ **отг.** $z_{2k} = 2k\pi i;\ z_{2k+1} = \left(2k+1\right)\pi i + \ln 3$

4) $e^{ix} = \cos\pi x, x \in \mathbb{R}$ **отг.** $x = 0$

5) $e^{z^2} = i$ **отг.** $z_k = \begin{cases} \pm\frac{1+i}{2}\sqrt{(4k+1)\pi}, & k = 0,1,2,... \\ \pm\frac{1-i}{2}\sqrt{(4k-1)\pi}, & k = 1,2,... \end{cases}$

6) $\ln\left(z+i\right) = 0$ **отг.** $z = 1 - i$

7) $\ln\left(i-z\right) = 1$ **отг.** $z = -e + i$

8) $\sin z = \pi i$ **отг.** $\begin{cases} z_{2k} = 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{\pi^2+1} - \pi\right) \\ z_{2k+1} = (2k+1)\pi - i\ln\left(\sqrt{\pi^2+1} + \pi\right) \end{cases}$

9) $\sin z = \frac{4}{3}i$ **отг.** $z_k = i(-1)^k \ln 3 + k\pi$

10) $\sin z = 3$ **отг.** $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$

11) $\cos z = 2$ **отг.** $z_k = 2k\pi \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

12) $4\cos z + 5 = 0$ **отг.** $z_k = (2k+1)\pi \pm i\ln 2$

13) $\cos z = \frac{3+i}{4}$ **отг.** $z_k = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln 2\right)$

14) $\sin z + \cos z = 2$ **отг.** $z_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right)$

15) $\sin z - \cos z = 3$ **отг.** $z_k = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

16) $\sin z - \cos z = i$ **отг.** $z_k = \frac{\pi}{4} + k\pi + (-1)^k i\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

17) $\sin^4 z + \cos^4 z = 1$ **отг.** $z_k = \frac{k\pi}{2}$

18) $\sin^6 z + \cos^6 z = 0$ **отг.** $z_k = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi - \frac{i}{4}\ln 3$

19) $\operatorname{sh} iz = -i$ **отг.** $z_k = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$

20) $\operatorname{sh} z = 0$ **отг.** $z_k = k\pi i$

21) $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$ **отг.** $z_k = (-1)^k \frac{\pi i}{6} + k\pi i$

22) $\operatorname{ch} z = 0$ **отг.** $z_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$

23) $\operatorname{ch} z = \frac{\pi}{2} i$ **отг.** $z_k = \ln \frac{\sqrt{\pi^2 + 4} \pm \pi}{2} + i\left(\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

24) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$ **отг.** $z_k = 2k\pi i$

25) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$ **отг.** $z_k = -\ln 2 + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$

26) $2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i$ **отг.** $\begin{cases} z_k = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i \\ z_k = -\ln 3 + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i \end{cases}$

27) $\cos z - \operatorname{ch} z = 0$ **отг.** $z_k = k\pi(1 \pm i)$

28) $\sin^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 0$ **отг.** $z_k = \frac{k\pi}{2}(1 \pm i)$

29) $\sin z = i \operatorname{sh} z$ **отг.** $\begin{cases} z_k = k\pi(1 + i) \\ z_k = \frac{\pi}{2}(2k + 1)(1 - i) \end{cases}$

30) $\cos z = i \operatorname{sh} 2z$ **отг.** $\begin{cases} z_k = \frac{\pi}{10}(4k + 1)(1 - 2i) \\ z_k = -\frac{\pi}{10}(4k + 1)(1 + 2i) \end{cases}$

31) $\operatorname{tg} z = \frac{5}{3} i$ **отг.** $z_k = i \ln 2 + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$

32) $\operatorname{cotg} z = -\frac{3}{5} i$ **отг.** $z_k = i \ln 2 - \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$

33) $\operatorname{cth} z = -1 + i$ **отг.** $z_k = -\frac{1}{4}\ln 5 + \frac{i}{2}\left(2k\pi - arctg 2\right)$

(***Забележка*****:** Навсякъде в задачите от V да се счита, че $k \in \mathbb{Z}$.)

VI. Да се намерят точките, в които не са дефинирани функциите:

1) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{\sin z\left(e^{\frac{\pi z}{2}} - i\right)\left(\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z - 1\right)}$ **отг.** $z_k = \begin{cases} k\pi \\ (1+4k)i \\ 2k\pi i \end{cases}$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

2) $f(z) = \dfrac{z-2}{\left(z^6+64\right)\left(e^z+1\right)\operatorname{th} z}$

отг. $\begin{cases} z_{1,2} = \sqrt{3} \pm i; z_{3,4} = -\sqrt{3} \pm i \\ z_{5,6} = \pm 2i \\ z_k = k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$

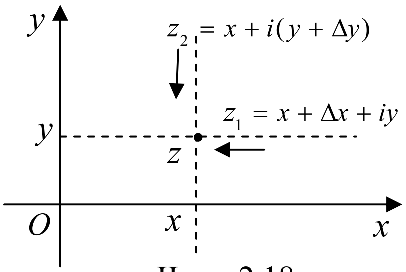
§7. Аналитични функции. Условия на Коши - Риман[32]

Нека $f(z)$ е функция на комплексна променлива, дефинирана и еднозначна в отворената област D.

[32] G.F.B.Riemann (17.09.1826 - 30.07.1866) - немски математик.

Дефиниция 1. *Производна* на функцията $f(z)$ в крайната точка $z \in D$ се нарича границата на отношението на нарастването на функцията и нарастването на аргумента, когато нарастването на аргумента клони към нула и ако тази граница съществува. Записваме

(1) $$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}.$$



Черт. 2.18

Оказва се, че големият произвол в начина (пътя), по който точката $z + \Delta z \to z$, довежда до това, че даже много прости функции на комплексна променлива могат да нямат производна. Например функцията

$$f(z) = \overline{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

2.18 Наистина нека дадем нарастване Δz на z. Тогава x и y също ще получат някакви нараствания Δx и Δy. Получаваме

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 - 2(x+\Delta x)(y+\Delta y)i}{\Delta x + i\Delta y} - \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Нека предположим първо, че $z_1 = z + \Delta z \to z$ по права, успоредна на оста Ox (черт. 2.18). Тогава $\Delta y = 0$, а $\Delta x \to 0$. Следователно $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta y = 0)}} \frac{\left[(x+\Delta x)^2 - y^2 - 2(x+\Delta x)yi\right] - \left(x^2 - y^2 - 2xyi\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\,\Delta x\,i}{\Delta x} = 2x - 2y\,i\,.$$

Сега обратно, нека $z_2 = z + \Delta z \to z$ по права, успоредна на оста Oy. Тогава $\Delta x = 0$, а $\Delta y \to 0$.

Следователно $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ (\Delta x = 0)}} \frac{\left[x^2 - (y + \Delta y)^2 - 2x(y + \Delta y)i\right] - \left(x^2 - y^2 - 2xyi\right)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2y\Delta y - 2x\Delta y i - (\Delta y)^2}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left(2yi - 2x + i\Delta y\right) = -2x + 2yi\ .$$

И така по двата пътя на приближаване на точката $z + \Delta z$ към $z \neq 0$ се получават различни стойности за границата. А това означава, че отношението $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ няма граница при $\Delta z \to 0$, а от тук и функцията $f(z)$ няма производна в точката $z \neq 0$.

Дефиниция 2. Функция, която има производна в дадена точка, се нарича *диференцируема* в тази точка.

Ще отбележим, че ако функцията $f(z)$ има производна в някоя точка $z = z_0$, то тя е непрекъсната в нея, тъй като при $\Delta z \to 0$ нарастването

$$\Delta f(z_0) = \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} \Delta z \to 0\,.$$

Обратното обаче не винаги е вярно. Например разгледаната в горния пример функция е непрекъсната в цялата комплексна равнина Z, но както видяхме не притежава производна в нито една точка от тази равнина, освен $z=0$ (Проверете!).

От равенство (1) условието за диференцируемост на функцията $f(z)$ в някоя точка $z_0 \in D$ може да се запише във вида:

(2) $$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(z_0, \Delta z),$$

където $\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$ $(z_0 + \Delta z \in D)$.

Оттук следва, че нарастването на диференцируемата функция може да се запише така:

(3) $$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z)\Delta z,$$

където $A = f'(z_0)$.

Обратно, всяка функция, нарастването на която може да бъде записано с равенство (3), където A е константа, независеща от Δz и ε, като ε клони към нула заедно с Δz, е диференцируема и нейната производна е равна на A.

Наистина от равенство (3) следва, че границата

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \quad (\Delta z = z - z_0; z_0,\, z \in D)$$

съществува и е равна на A.

Следователно необходимото и достатъчно условие функцията $f(z)$ да е *диференцируема* в някоя точка $z \in D$ (D - дефиниционна област на функцията) е нейното нарастване в тази точка да може да се запише във вида (3), където A е константа, независеща от Δz и ε, а $\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Ако означим Δz с dz (диференциал на независимата променлива), то изразът $A\Delta z = f'(z)dz$ се нарича *диференциал* на функцията $f(z)$ в точката z и се записва с $df(z)$, т.е.

$$df(z) = f'(z)dz.$$

Оттук $f'(z)$ може да се запише и така:

$$f'(z) = \frac{d\,f(z)}{dz}$$

Теорема 1. (*Необходими и достатъчни условия за диференцируемост на функция в точка от областта D*) За да бъде функцията $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, дефинирана в някаква област D, диференцируема в точка $z \in D$ като функция на комплексна променлива, е необходимо и достатъчно функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ да са диференцируеми[33] в тази точка (като реални функции на две реални променливи) и освен това да се изпълняват условията:

---

[33] Ще напомним, че реалната функция $\varphi(x,y)$ на двете реални променливи x и y се нарича диференцируема в точка $M(x_0, y_0)$ от дефиниционната област D на тази функция, ако е в сила равенството

$$\begin{gathered}\Delta\varphi(x_0,y_0) = \varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0) = \\ = A(x_0,y_0)\Delta x + B(x_0,y_0)\Delta y + \\ +\varepsilon_1(x,y;x_0,y_0)\Delta x + \varepsilon_2(x,y;x_0,y_0)\Delta y,\end{gathered}$$

където $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, а $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varepsilon_1(x,y;x_0,y_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varepsilon_2(x,y;x_0,y_0) = 0$. Коефициентите $A(x_0,y_0)$ и $B(x_0,y_0)$ в дясната страна на горното равенство са частните производни на функцията $\varphi(x,y)$: $A(x_0,y_0) = \frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x}$; $B(x_0,y_0) = \frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}$.

(4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

При изпълнение на всички условия на теоремата производната $f'(z)$ може да се запише по един от следните начини:

(5) $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условията (4) имат основно значение в теорията на аналитичните функции и в приложенията на тази теория към задачите от механиката и физиката. Те се наричат *условия на Коши - Риман*[34].

Доказателство: *Необходимост*: Нека функцията $w = f(z)$ е диференцируема в точка $z \in D$. Тогава

(6) $$\Delta f(z) = f'(z)\Delta z + \varepsilon \Delta z,$$

където $\Delta z = z_1 - z = (x_1 - x) + i(y_1 - y) = \Delta x + i\Delta y$;

$$\Delta f(z) = f(z_1) - f(z) =$$
$$= \left[u(x_1, y_1) - u(x, y)\right] + i\left[v(x_1, y_1) - v(x, y)\right] = \Delta u + i\Delta v;$$

---

[34] В някои учебници тези условия се наричат условия на Даламбер - Ойлер, тъй като те са се изучавали още през 18 век от Даламбер и особено от Ойлер в работи, посветени на приложението на функция на комплексна променлива в хидромеханиката (Даламбер и Ойлер), картографията и интегралното смятане (Ойлер). Така че от историческа гледна точка е справедливо условия (4) да се наричат условия на Даламбер - Ойлер, а не на Коши - Риман, както е общоприето в учебната и научна литература.

$f'(z) = a + ib$; $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, при което $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, когато Δx и $\Delta y \to 0$ едновременно.

Заместваме горните равенства в (6) и получаваме
$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\Delta x + i\Delta y)$.

Приравнявайки Re и Im части от двете страни на това равенство, имаме

(7)
$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y \end{cases},$$

където $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2 = 0$.

От равенства (7) следва, че функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$, като реални функции на реалните променливи x и y, са диференцируеми в точка (x, y) и техните частни производни в тази точка са

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -b; \ \frac{\partial v}{\partial x} = b \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = a.$$

Следователно $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, т.е. изпълняват се условията на Коши - Риман (4).

Освен това за $f'(z)$ получаваме равенства (5):

$$f'(z) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Необходимостта е доказана.

Достатъчност: Нека функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са диференцируеми в точка $z = (x, y)$ и се изпълняват условията на Коши - Риман (4), а именно:

(8) $$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \\ \Delta v = \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \end{cases},$$

където α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \to 0$ при Δx и $\Delta y \to 0$. При това

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, \; -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b.$$

Следователно равенства (8) могат да се запишат така:

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y \end{cases}.$$

Тогава

(9) $$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v = a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y) +$$
$$+(\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y =$$
$$= (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + \left[(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z} \right]\Delta z =$$
$$= A\Delta z + \varepsilon \Delta z,$$

където $A = a + ib$, а ε е изразът в средните скоби.

Тъй като

$$|\varepsilon| = \left| (\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \le$$
$$\le |\alpha_1 + i\beta_1| \left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| + |\alpha_2 + i\beta_2| \left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \le$$
$$\le |\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2| \le |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2|,$$

то ε заедно с α_1, α_2, β_1 и β_2 клони към нула при $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$. Оттук и от равенство (9) следва, че функцията $f(z)$ е диференцируема и нейната производна е

$$f'(z)=A=a+ib=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

С това доказателството на теоремата е завършено.

Ще предложим и друго доказателство на теорема 1:

Необходимост: Нека производната $f'(z)$ съществува в точка $z\in D$ и $z+\Delta z\in D$. Тогава

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}-\frac{u(x,y)+iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\right]+i\left[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\right]}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Тъй като границата съществува, то тя ще приема една и съща стойност независимо от това как $z+\Delta z\to z$. Ще разгледаме два пътя, по които $z+\Delta z\to z$. Нека първо $\Delta y=0$, а $\Delta x\to 0$ (черт. 2.19).
Получаваме

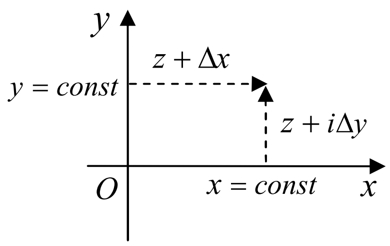
$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta y=0)}}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Нека сега $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$ (черт. 2.19). Получаваме

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\(\Delta x=0)}}\left[\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}\right]=$$

$$=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$



Черт. 2.19

Сравнявайки двата израза, получени за $f'(z)$, имаме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Оттук

$f'(z) = u_x + i\,v_x = v_y - i\,u_y =$ и т. н .

Остава да докажем диференцируемостта на функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Тъй като $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ по условие съществува $(= f'(z))$, то нека да означим тази граница с $a + i\,b$. От дефиницията на граница на функция имаме, че $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} - (a + ib) = \alpha + i\beta$, където $\alpha,\ \beta \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Но

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} - (a + ib) = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} - (a + ib) = \alpha + i\beta .$$

Оттук

$$\begin{cases} \Delta u = a\,\Delta x - b\,\Delta y + \alpha\,\Delta x - \beta\,\Delta y \\ \Delta v = b\,\Delta x + a\,\Delta y + \beta\,\Delta x + \alpha\,\Delta y \end{cases}.$$

Получените равенства за пълните нараствания на функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ означават диференцируемост на тези функции.

Достатъчност: Обратно, нека сега е дадено, че функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ са диференцируеми и удовлетворяват условията на Коши - Риман. Трябва да докажем съществуването на производна $f'(z)$ на функцията $f(z)$ в точка $z \in D$. Ще докажем, че съществува

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\right]+i\left[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\right]}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Ще се възползваме от диференцируемостта на функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ и от равенства (4), за да запишем

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y;$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y=$$

$$=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y+\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y,$$

където $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2\to 0$ при Δx и $\Delta y\to 0$. Тогава

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha_1+i\beta_1)\Delta x+(\alpha_2+i\beta_2)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[\left(\alpha_1 + i\beta_1\right)\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \left(\alpha_2 + i\beta_2\right)\frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right].$$

Но $\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\right| \le 1$ и $\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right| \le 1$, а $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \to 0$, когато Δx и $\Delta y \to 0$.

Следователно $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, т.е. тази граница съществува, а по дефиниция тя представлява $f'(z)$. Следователно $f'\left(z\right) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, а от условията на Коши - Риман за $f'\left(z\right)$ ще се изпълняват и останалите три равенства в (5) .

От функция на повече променливи е известно, че за диференцируемостта на функциите $u\left(x, y\right)$ и $v\left(x, y\right)$ е достатъчно съществуването и непрекъснатостта на техните частни производни: u_x, u_y, v_x, v_y. Ето защо за диференцируемостта на функцията $f\left(z\right) = u + iv$ е достатъчно горните частни производни да съществуват, да са непрекъснати в точка $z = \left(x, y\right)$ и да удовлетворяват условията на Коши - Риман (4).

В необходимостта обаче не е нужна непрекъснатост на тези частни производни.

Пример 1. Проверете условията на Коши - Риман (4) за функцията $w = e^z$ и намерете нейната производна.

Решение: Полагаме $z = x + iy$ в $w = e^z$ и отделяме Re и Im части. Получаваме

$$w = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = e^x\cos y + ie^x\sin y.$$

Следователно $u(x,y)=e^x\cos y$, а $v(x,y)=e^y\sin y$. Частните производни от първи ред за тези две функции съществуват и са непрекъснати за всяка точка $z=(x,y)$. Следователно тези две функции са диференцируеми. При това $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$, а $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$, т.е. изпълняват се и условията на Коши - Риман. Оттук заключаваме, че функцията $w=f(z)$ е диференцируема и нейната производна според (5) е

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+i\,e^x\sin y=$$

$$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z.$$

И така $\left(e^z\right)'=e^z$, т.е. както и $\left(e^x\right)'=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Дефиниция 3. Еднозначната и диференцируема във всяка точка на областта D функция $f(z)$ се нарича *аналитична* (холоморфна, правилна, регулярна) в тази област.

Дефиниция 4. Функцията $f(z)$ се нарича *аналитична в крайна точка*, ако е аналитична в някаква околност на тази точка.

Забележка 1. По-правилно е функция, еднозначна и диференцируема във всяка точка на някаква област, да се нарича регулярна (холоморфна) в тази област.

Регулярната функция се нарича също и аналитична. Обаче понятието аналитичност е по-широко от понятието регулярност. Аналитичната функция може да бъде и многозначна.

Ние обаче ще се придържаме към възприетото в повечето учебници понятие аналитичност, тъй като ще разглеждаме или само еднозначни функции, или главния клон на многозначните функции.

Ще отбележим още, че дефиниция 4 може да се изкаже и така: функцията $f(z)$ се нарича *регулярна в точка*, ако тя е регулярна в някаква околност на тази точка.

Очевидно функция, аналитична (регулярна) в точка, е и диференцируема в нея. Обратното може и да не е вярно.

Например разгледаната функция $w=\overline{z}^2$. Тя е диференцируема само в точката $z=0$, но не е аналитична в тази точка.

От приведените дефиниции се вижда, че понятието аналитичност и диференцируемост в област съвпадат, като в същото време, условието аналитичност в точка е по-силно, отколкото условието диференцируемост в точка; наистина условието аналитичност в точка изисква функцията да е диференцируема не само в точката, но и в някаква нейна околност.

Дефиниция 5. Точката $z=a$ се нарича *регулярна* (*правилна*) точка на функцията $f(z)$, ако в някаква нейна околност функцията $f(z)$ е аналитична. Точката $z=a$ се нарича *особена* точка на функцията, ако в никаква нейна околност функцията не е аналитична.

Или: точките от равнината Z, в които еднозначната функция $f(z)$ е аналитична, се наричат *правилни* точки на $f(z)$. Точките, в които функцията $f(z)$ не е аналитична, се наричат *особени* точки на тази функция.

От дефиниция 1 за производна на функцията $f(z)$ и от свойствата на граница на функция следва (аналогично, както в реалния анализ), че ако функциите $f_1(z)$ и $f_2(z)$ са диференцируеми или аналитични в точка z, то са диференцируеми или аналитични и функциите $f_1(z) \pm f_2(z)$; $f_1(z) f_2(z)$;

$Cf(z)$, $C = const$, и $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ при $f_2(z) \neq 0$. Освен това са в сила познатите ни формули:

$$\left[f_1(z) \pm f_2(z)\right]' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$$

$$\left[f_1(z).f_2(z)\right]' = f_1'(z).f_2(z) + f_1(z).f_2'(z)$$

$$\left[C.f(z)\right]' = C.f'(z)$$

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z).f_2(z) - f_1(z).f_2'(z)}{f_2^{\,2}(z)}.$$

По същата причина, ако функциите $f_1(z)$ и $f_2(z)$ са аналитични в някаква област D, в тази област са аналитични и функциите

$$f_1 \pm f_2 \ , \ f_1.f_2 \ , \ C f_1 \ \text{ и } \ \frac{f_1}{f_2} \ , \ f_2 \neq 0 \ .$$

В сила е и правилото за *диференциране на съставна функция*. Ако функцията $w = f(z)$ е диференцируема в точка z_0, а функцията $\zeta = F(w)$ е диференцируема в точка $w_0 = f(z_0)$, то и съставната функция $\zeta = F\left[f(z)\right]$ е диференцируема в точка z_0 и $\zeta'(z_0) = F'(w_0).f'(z_0)$.

Теорема 2. Нека функцията $w = f(z) \neq const$ е аналитична в областта D_z. Ако чрез $w = f(z)$ областта D_z се изобразява в множеството D_w, то това множество е също област.

От тази теорема следва, че ако $w = f(z)$ е аналитична в областта D_z, а функцията $\zeta = F(w)$ е аналитична в областта D_w, то и съставната функция $\zeta = F\left[f(z)\right]$ е аналитична в D_z.

В сила е и правилото за *диференциране на обратна функция*. Нека функцията $w = f(z)$ установява взаимно еднозначно съответствие (биекция) между точките на две множества D и E, при което обратната ѝ функция $z = \varphi(w) = f^{-1}(w)$ е непрекъсната в E. Тогава, ако $f(z)$ е диференцируема (аналитична) в точка $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$, то и обратната функция $z = \varphi(w)$ е диференцируема (аналитична) в точка $w_0 = f(z_0)$ и $\varphi'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$ (доказателството е както в реалния анализ).

Използвайки дефиниция 1 могат да се изведат производните на всички разгледани в § 6 елементарни функции.

Например $\quad (\sin z)' = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\sin(z + \Delta z) - \sin z}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta z}{2} \cos\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} = \cos z \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta z}{2}}{\frac{\Delta z}{2}} = \cos z .$$

Производните на останалите елементарни функции не се различават от тези в реалния анализ. Оттук следва и непрекъснатостта на всички тези функции.

За многозначните функции се налага да се отделя еднозначен клон на тези функции, за да могат да се използват понятията и резултатите, получени за еднозначните функции. Например за $\operatorname{Ln} z$ можем да вземем неговата главна стойност $\ln z$, която е еднозначна, дефинирана за $\forall z \neq 0$ и аналитична в комплексната равнина Z с разрез по отрицателната (респективно, положителната) ос x, производната на която е $(\ln z)' = \frac{1}{z}$. Тъй като всеки друг клон на $\operatorname{Ln} z$ се получава от $\ln z$ чрез прибавяне на число, кратно на $2\pi i$, то за $\operatorname{Ln} z$ получаваме, че $(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$, независимо от избора на еднозначния клон на тази функция. (Ще отбележим, че всеки клон на многозначната функция $\operatorname{Ln} z$ е аналитична функция в равнината Z с разрез от точка $z = 0$ до точка $z = \infty$.)

Аналогично и другите изучени многозначни функции имат една и съща производна, независимо от клона на тази функция, който се използва.

В много случаи е важно да имаме условия за диференцируемост на функцията на комплексна променлива $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ в точка $z \neq 0$, изразени с помощта на полярните координати: $r = |z|$ и $\operatorname{Arg} z = \Phi$.

Тези условия (необходими и достатъчни) са следните:

1) u и v да са диференцируеми функции на r и Φ и

2) техните частни производни да са свързани със съотношенията

(10)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v}{\partial \Phi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial u}{\partial \Phi} \end{cases}.$$

За да се убедим в това, достатъчно е да покажем, че u и v са диференцируеми като функции на r и Φ $(r \neq 0)$ тогава и само тогава, когато те са диференцируеми като функции на x и y и, че при тези условия, равенства (10) са еквивалентни на равенства (4). Но изпълнението на първото изискване следва от известния от общия курс на математическия анализ факт, че диференцируемата функция (напр. $u = u(x, y)$) от диференцируеми функции (в случая $x = r\cos\Phi$ и $y = r\sin\Phi$) е също диференцируема (относно променливите r и Φ). Второто твърдение се проверява непосредствено. Нека условие 1) е изпълнено и освен това са изпълнени условия (4). Тогава

(11)
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\Phi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\Phi = \frac{\partial v}{\partial y}\cos\Phi - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x}\cos\Phi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\Phi = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\Phi + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\Phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Phi}\end{aligned},$$

тъй като

$$\frac{\partial u}{\partial \Phi} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-r\sin\Phi\right) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\Phi = r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\Phi - \frac{\partial u}{\partial x}\sin\Phi\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \Phi} = \frac{\partial v}{\partial x}\left(-r\sin\Phi\right) + \frac{\partial v}{\partial y} r\cos\Phi = r\left(\frac{\partial v}{\partial y}\cos\Phi - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\Phi\right).$$

Лесно се прави и обратният преход от условия (10) към условия (4).

Записвайки равенства (11) във вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\Phi - \dfrac{\partial v}{\partial x}\sin\Phi \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\Phi + \dfrac{\partial u}{\partial x}\sin\Phi\end{cases},$$

получаваме от тях

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\Phi + \dfrac{\partial v}{\partial r}\sin\Phi \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\Phi + \dfrac{\partial v}{\partial r}\cos\Phi\end{cases}$$

и следователно

(12) $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial r}(\cos\Phi-i\sin\Phi)+i\frac{\partial v}{\partial r}(\cos\Phi-i\sin\Phi)=$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\mathit{\Phi}-i\sin\mathit{\Phi})=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

Или, използвайки (10), $f'(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\Phi}-i\frac{\partial u}{\partial\Phi}\right)$.

Например функцията
$$w=\ln z=\ln r+i\Phi\quad \left(z=r(\cos\Phi+i\sin\Phi)\right)$$
има производна във всяка точка $z\neq 0$ от своята област на аналитичност. Наистина тук $u(r,\Phi)=\ln r$, а $v(r,\Phi)=\Phi$.

Следователно $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r},\ \frac{\partial u}{\partial\Phi}=0,\ \frac{\partial v}{\partial r}=0,\ \frac{\partial v}{\partial\Phi}=1$.

Оттук условия (10) (на Коши - Риман в полярни координати) се изпълняват и затова от формула (12) получаваме
$$w'=(\ln z)'=\frac{r}{z}\left(\frac{1}{r}+i.0\right)=\frac{1}{z}.$$

Дефиниция 6. Еднозначната реална функция $\varphi(x,y)$ на две реални променливи x и y се нарича *хармонична* в областта D, ако тя е непрекъсната в D, има непрекъснати частни производни от първи и втори ред и удовлетворява уравнението на Лаплас:

(13) $$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

където Δ е оператора на Лаплас[35] и $\Delta=\nabla^2$ (∇ - набла вектор или

[35] P. S. Laplace (23.03.1749-05.03.1827) - френски математик, физик и астроном.

оператор на Хамилтон).

Теорема 3. Реалната и имагинерната части на всяка аналитична функция са хармонични функции.

Доказателство: Нека $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ е аналитична функция. Тогава се изпълняват условията на Коши - Риман (4) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ако двете части на първото равенство диференцираме[36] по x, а двете части на второто - по y, и съберем получените резултати, получаваме

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. функцията $u(x,y)$ удовлетворява уравнението на Лаплас и следователно е хармонична функция.

Аналогично, диференцирайки първото равенство по y, а второто - по x, и изваждайки резултатите, получаваме, че

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. и функцията $v(x,y)$ е хармонична.

Дефиниция 7. Две хармонични функции, свързани с условията на Коши - Риман, се наричат *спрегнати* хармонични функции.

[36] Съществуването на производните от втори ред, както и тяхната непрекъснатост, ще бъдат доказани в § 10.

Теорема 4. По всяка хармонична функция може да се построи аналитична функция, реалната (или имагинерната) част на която съвпада с дадената функция.

Доказателство: Нека е дадена хармоничната функция $u(x,y)$. Ще докажем, че може да се намери такава функция $v(x,y)$, че $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ е аналитична функция. Затова функцията $v(x,y)$ трябва да удовлетворява условията на Коши - Риман (4): $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Ако функцията $v(x,y)$, която ги удовлетворява, съществува, то и нейният пълен диференциал съществува и е

(14) $$dv(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Последната сума отдясно в равенствата (14) е известна, тъй като функцията $u(x,y)$ е дадена по условие, а функцията $v(x,y)$ трябва да се намери. От анализа знаем, че изразът $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ е пълен диференциал на някаква функция тогава и само тогава, когато $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. В нашия случай $P(x,y)=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, а $Q(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$. Следователно разглежданата сума в (14) е пълен диференциал, ако $P_y=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ е равна на $Q_x=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ т.е. ако $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Но последното равенство е изпълнено, тъй като по условие функцията $u(x,y)$ е хармонична. Следователно дясната страна на

(14) е пълен диференциал на функцията $u(x,y)$. От (14) получаваме

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C,\ \ C=const\,;$$

тук интегрирането става по произволна крива, съединяваща точка (x_0,y_0) с точка (x,y), като кривата лежи в областта на непрекъснатост на подинтегралния израз.

И така, ако съществува аналитична функция с дадена реална част $u(x,y)$, то тя може да се запише във вида:

(15) $$f(z)=u(x,y)+i\left[C+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)\right].$$

Обратно, ако по дадена хармонична функция $u(x,y)$ съставим, съгласно формула (15), функцията $f(z)$ и имагинерната ѝ част означим с $v(x,y)$, то получаваме:

$$v(x,y)=C+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right).$$

Под знака на интеграла стои пълен диференциал и затова може да се използва правилото за диференциране на криволинейния интеграл по горната граница. Получаваме

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y};\ \ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Условията на Коши - Риман (4) се изпълняват и затова $f(z)$ е аналитична функция.

Следователно, ако $u(x,y)$ е хармонична функция, то по формула (15) може да се построи аналитична функция (с точност до константа), реалната част на която е равна на $u(x,y)$.

Аналогично се решава задачата за построяване на аналитична функция по нейната имагинерна част.

Теоремата е доказана.

На практика се постъпва малко по-различно, което се вижда от следния пример:

Пример 2. Намерете аналитична функция

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

по функцията $\varphi(x,y) = 2e^x \cos y$, ако:

а) $\varphi(x,y) = u(x,y)$;

б) $\varphi(x,y) = v(x,y)$.

Решение: Функцията $\varphi(x,y) = 2e^x \cos y$ е непрекъсната в цялата равнина Oxy и има непрекъснати частни производни от първи и втори ред (това е очевидно). Освен това $\varphi_{xx} = 2e^x \cos y$; $\varphi_{yy} = -2e^x \cos y$ и $\Delta\varphi \equiv 0$, т.е. $\varphi(x,y)$ удовлетворява уравнението на Лаплас. Следователно функцията $\varphi(x,y) = 2e^x \cos y$ е хармонична и има смисъл по нея да се възстанови аналитична функция, в която $\varphi(x,y)$ е Re или Im част.

а) Нека $\varphi(x,y) = \mathrm{Re}\, w = u(x,y) = 2e^x \cos y$. Тогава от условията на Коши - Риман имаме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Избираме това от равенствата, което е по-лесно за интегриране по съответната променлива, по която е намерена частната производна на $v(x,y)$ (в случая те са равностойни), напр. $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$. Интегрираме избраното равенство по y, като x се приема за константа. Ето защо за произволна константа при интегрирането се взема функция на x:

$$v = \int 2e^x \cos y\, dy + \psi(x) = 2e^x \sin y + \psi(x).$$

Сега диференцираме получената функция v спрямо променливата x: $\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y + \psi'(x)$. За да определим $\psi'(x)$ използваме второто равенство от условията на Коши - Риман, неизползвано досега: $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y$. Приравнявайки двата израза за $\frac{\partial v}{\partial x}$, получаваме $2e^x \sin y + \psi'(x) = 2e^x \sin y$, т.е. $\psi'(x) = 0$, откъдето $\psi(x) = C$, $C = const$.

И така $w = f(z) = u + iv = 2e^x \cos y + i\left(2e^x \sin y + C\right) =$

$$= 2e^x(\cos y + i \sin y) + iC = 2e^x e^{iy} + iC = 2e^{x+iy} + iC = 2e^z + iC.$$

Ако положим напр. $f(0) = 2$, то ще намерим и конкретна константа $C: f(0) = 2 + iC = 2 \Rightarrow C = 0$, т. е. $w = f(z) = 2e^z$.

Ще приложим и директно формула (15):

$$f(z) = 2e^x \cos y + i\left[C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(2e^x \sin y dx + 2e^x \cos y dy\right)\right] =$$

$$= 2e^x \cos y + i\left[C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 2d\left(e^x \sin y\right)\right] =$$

$$= 2e^x \cos y + i\left[C + 2e^x \sin y \Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \right] =$$

$$= 2e^x \cos y + i\left[C + 2e^x \sin y - 2e^{x_0} \sin y_0 \right] =$$

$$= 2e^x \cos y + i\left(2e^x \sin y + C_1 \right),$$

където $C_1 = C - 2e^{x_0} \sin y_0$. Следователно

$$f(z) = 2e^x \left(\cos y + i \sin y \right) + iC_1 = 2e^z + iC_1 .$$

Ако $f(0) = 2$, то $f(0) = 2 + iC_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 0$.

И така $f(z) = 2e^z$.

Трудността при прилагане на формула (15) е, че не винаги е възможно да се съобрази как да се запише пълният диференциал под знака на интеграла. В тези случаи е необходимо да се използва идеята за независимост на криволинеен интеграл от втори род от пътя на интегриране и да се приложи предложената там формула.

б) Нека сега $\varphi(x, y) = v(x, y) = 2e^x \cos y$. Постъпваме аналогично, както в п. а) (без използване на формула (15)). От условията на Коши – Риман $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \cos y = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2e^x \sin y = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$ избираме напр. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -2e^x \sin y$. Тогава

$$u = \int -2e^x \sin y dx + \tau(y) = -2e^x \sin y + \tau(y).$$

Оттук $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \cos y + \tau'(y) = -2e^x \cos y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Следователно $\tau'(y) = 0$ и $\tau(y) = k = const$, т.е. $u(x, y) = -2e^x \sin y + k$. Тогава

$$w = f(z) = u + iv = -2e^x \sin y + k + i.2e^x \cos y =$$
$$= 2e^x i(\cos y + i \sin y) + k = 2ie^x e^{iy} + k = 2ie^z + k.$$

Нека сега $f(0) = 2(1+i)$. От равенството $f(0) = 2i + k = 2(1+i)$ получаваме $k = 2$.

Следователно $w = 2ie^z + 2 = 2i\left(e^z - i\right)$.

Ще цитираме сега две важни теореми, но няма да се спираме на тяхното доказателство:

Теорема 5. Нека степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ има радиус на сходимост R. Тогава и степенният ред, получен от почленното диференциране на дадения ред, има същия радиус на сходимост.

Теорема 6. Нека степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ има радиус на сходимост $R > 0$ и нека сумата му е $f(z)$. Тогава функцията

(16) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

е диференцируема за $\forall z$, за което $|z| < R$, и освен това е в сила равенството

(17) $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

От тази теорема следва, че всяка функция $f(z)$, която е представена със степенния ред (16), е аналитична вътре в кръга $|z|<R$. Тъй като $f'(z)$ също е представена със степенен ред ((17)) със същия радиус на сходимост R, то $f'(z)$ е също диференцируема (аналитична) вътре в този кръг. Така, прилагайки последователно тази теорема, получаваме, че всяка функция, която е представена със степенен ред, е не само аналитична, а и притежава производни от произволен ред, които също са аналитични вътре в кръга на сходимост. По-късно ще видим, че това свойство притежават всички аналитични в някаква област функции.

Ще цитираме и следната теорема на Вайерщрас[37]:

Теорема 7. (Вайерщрас) (*За равномерно сходящи редове от аналитични функции*) Ако членовете на реда

(18) $$f_0(z)+f_1(z)+......+f_n(z)+....,$$

равномерно сходящ вътре в областта D, са аналитични в тази област, то сумата на реда $S(z)$ е също аналитична в областта D.

Освен това редовете

$$f_0^{(k)}(z)+f_1^{(k)}(z)+...+f_n^{(k)}(z)+...,$$

получени чрез k-кратно $(k=1,2,...)$ почленно диференциране на реда (18), също са равномерно сходящи вътре в D и сумите им в тази област са съответно производните от k-ти ред на сумата $S(z)$ на реда (18).

Трябва да се помни, че теоремата на Вайерщрас е формулирана и се доказва за редове от аналитични функции, като

---

[37] Доказателството можете да видите в учебника на А И. Маркушевич "Теория аналитических функций" т. 1, гл. 3, § 4, стр. 265 – 267.

тези редове са равномерно сходящи в област. В случай на произволно множество (не отворено) тя може и да не е вярна.

Забележка 2. В частност степенните редове могат да се диференцират почленно във всеки затворен кръг, който се съдържа изцяло в техния кръг на сходимост. При това сумата на получения след диференцирането ред е производната на сумата на изходния.

На края ще спомена, че основата на общата теория на аналитичните функции е създадена с трудовете на тримата най-известни математици на 19 век - А. Коши, Б. Риман и К. Вайерщрас. Всеки от тях по своему е стигнал до построяването на теорията на аналитичните функции.

Дефиницията на аналитична функция принадлежи на Коши. Той е получил основните интегрални теореми в теорията на аналитичните функции (§ 9 и § 10), разлагането в ред на Тейлор (§ 11) и е построил теорията на резидуумите (§ 12).

Риман е построил геометричната теория на аналитичните функции - конформните изображения (§ 8) и римановите повърхнини. Той е разглеждал аналитичната функция като взаимно еднозначно и непрекъснато изображение на една риманова повърхнина върху друга (този материал не е включен в курса).

Вайерщрас е определил аналитичната функция с помощта на съвкупност от степенни редове, всеки от които представлява степенен ред, аналитично продължен с друг.

Задачи

I. Използвайте условията на Коши - Риман, за да проверите кои от следните функции са аналитични и кои не:

1) $w=z^2\overline{z}$	**отг.** не	**8)** $w=\|z\|\operatorname{Im} z$	**отг.** не
2) $w=\|z\|\overline{z}$	**отг.** не	**9)** $w=\operatorname{ch} z^3$	**отг.** да
3) $w=\|z\|\operatorname{Re}\overline{z}$	**отг.** не	**10)** $w=z^2e^{z-1}$	**отг.** да
4) $w=\sin 3z-i$	**отг.** да	**11)** $w=z\cos z$	**отг.** да
5) $w=z\operatorname{Re} z$	**отг.** не	**12)** $w=e^{z^2}$	**отг.** да
6) $w=\overline{z}\operatorname{Im} z$	**отг.** не	**13)** $w=e^{\operatorname{ch}^2 z}$	**отг.** да
7) $w=ze^z$	**отг.** да	**14)** $w=z\overline{z}+\operatorname{Re} z^2$	**отг.** не

15) $w=\dfrac{\cos z}{\cos z-\sin z}$, $\forall z\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi \ \ (k=0,\pm1,\pm2,...)$ **отг.** да

16) $w=\dfrac{z^3\operatorname{sh} z}{e^z-1}$, $\forall z\neq 2k\pi i \quad (k=0,\pm1,...)$ **отг.** да

17) $w=ze^{\frac{1}{\sin z}}$, $\forall z\neq k\pi \ \ (k=0,\pm1,...)$ **отг.** да

18) $w=\operatorname{tg} z$, $\forall z\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \ \ (k=0,\pm1,...)$ **отг.** да

19) $w=\left(e^z-e^{-z}\right)^{-2}$, $\forall z\neq k\pi i \ \ (k=0,\pm1,...)$ **отг.** да

20) $w=z^2\operatorname{sh} z^2-5e^{\operatorname{cotg} z}$, $\forall z\neq k\pi \ \ (k=0,\pm1,...)$ **отг.** да

21) $w=\dfrac{1}{z^2}+\ln z$, $z\neq 0$ и $z\in Z$ с разрез по положителната (отрицателната) реална ос **отг.** да

II. Намерете числата a, b и c, за които функцията $f(z)$ е аналитична. Запишете я като функция на z.

1) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$

отг. $c=1,\ b=-a$, $f(z)=(1-ai)z$

2) $f(z) = \cos x(\text{ch}y + a\,\text{sh}y) + i(\text{ch}y + b\,\text{sh}y)\sin x$

отг. $a = b = -1$, $f(z) = e^{iz}$

III. Намерете областта, в която функцията $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ е аналитична. Запишете $f(z)$ като функция на z.

отг. $f(z) = z^2$ за $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ и $\pi < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}$;

$f(z) = -z^2$ за $\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \arg z < \dfrac{7\pi}{4}$

IV. Проверете дали се изпълняват условията на Коши - Риман и, ако се изпълняват, намерете производните на функциите:

1) $w = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$

отг. да, $w' = 3\left(x^2 - y^2\right) + i\,6xy = 3z^2$

(***Упътване***: $w' = u_x + i\,v_x$ или $w = f(z)$ и $w' = f'(z)$.)

2) $w = xy - \dfrac{1}{2}i\left(x^2 - y^2\right)$ **отг.** да, $w' = y - ix = -iz$

3) $w = x^3 + y + i\left(x + y^3\right)$ **отг.** не

4) $w = \dfrac{z}{\overline{z}}$ **отг.** не

5) $w = -3r\sin\Phi + 3ir\cos\Phi$

отг. да, $w' = 3\dfrac{i\cos\Phi - \sin\Phi}{\cos\Phi + i\sin\Phi} = 3i$

6) $w = e^{\text{ch}\,z}$ **отг.** да, $w' = \text{sh}\,z\,e^{\text{ch}\,z}$

7) $w=\sin\left(2e^z\right)$ **отг.** да, $w'=2e^z\cos\left(2e^z\right)$

8) $w=\dfrac{z\cos z}{z^2+1}$

отг. да, за $\forall z\neq\pm i$, $w'=\dfrac{\left(1-z^2\right)\cos z-z\left(1+z^2\right)\sin z}{\left(1+z^2\right)^2}$

9) $w=ze^{-z}$ **отг.** да, $w'=e^{-z}\left(1-z\right)$

10) $w=\dfrac{e^z}{z}$ **отг.** да, $w'=\dfrac{e^z\left(z-1\right)}{z^2}, \forall z\neq 0$

V. Проверете, че записаните по-долу функции са хармонични и намерете спрегнатата хармонична функция, след което възстановете цялата аналитична функция

$$w=f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+i\,v\left(x,y\right):$$

1) $u\left(x,y\right)=x^2-y^2-5x+y+2$, $0\leq|z|<\infty$

отг. $v=2xy-x-5y+C$, $w=z^2-(5+i)z+2+iC$

2) $u\left(x,y\right)=x^3-3xy^2$, $0\leq|z|<\infty$

отг. $v=3x^2y-y^3+C$, $w=z^3+iC$

3) $v\left(x,y\right)=2e^x\sin y$, $0\leq|z|<\infty$

отг. $u=2e^x\cos y+C$, $w=2e^z+C$

4) $v\left(x,y\right)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x^2+y^2>0$

отг. $u=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+C$, $w=\ln z+C$

5) $u(x,y)=x^2-4xy-y^2$, $0\leq|z|<\infty$

отг. $v = 2\left(x^2 - y^2 + xy\right) + C$, $w = (1+2i)z^2 + Ci$

6) $u\left(x, y\right) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $0 < |z| < \infty$

отг. $v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} + 2x + C$, $w = \dfrac{1}{z} + 2iz + iC$

7) $u\left(x, y\right) = x^2 - y^2 + xy$, $0 \leq |z| < \infty$

отг. $v = 2xy + \dfrac{y^2 - x^2}{2} + C$, $w = \left(1 - \dfrac{i}{2}\right)z^2 + iC$

8) $v\left(x, y\right) = xy$, $0 \leq |z| < \infty$ **отг.** $u = \dfrac{x^2 - y^2}{2} + C$, $w = \dfrac{1}{2}z^2 + C$

9) $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x$, $x^2 + y^2 \neq 0$

отг. $u = -y + \dfrac{y}{x^2 + y^2} + C$, $w = i\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + C$

10) $u(x, y) = x \sin x \operatorname{ch} y - y \cos x \operatorname{sh} y$

отг. $v = x \cos x \operatorname{sh} y + y \sin x \operatorname{ch} y + C$, $w = z \sin z + iC$

VI. Да се възстанови аналитична функция $w = f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + i\,v\left(x, y\right)$ по дадена реална (имагинерна) част, която е хармонична функция, ако е известна стойността $f\left(z_0\right)$ на търсената функция. Заменете в условията на задачите $u\left(x, y\right)$ с $v\left(x, y\right)$ и обратно и намерете новите аналитични функции. Каква е връзката между получените две аналитични функции? Докажете тази зависимост в общ вид.

1) $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$;

$f(1)=6+i$ **отг.** $w=z^2+(5-i)z-\dfrac{i}{z}+3i$

2) $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$; $f(0)=0$ **отг.** $w=ze^z$

3) $u(x,y)=x\cos x\,\mathrm{ch}y+y\sin x\,\mathrm{sh}y$; $f(0)=0$ **отг.** $w=z\cos z$

4) $v(x,y)=y\cos y\,\mathrm{ch}x+x\sin y\,\mathrm{sh}x$; $f(0)=0$ **отг.** $w=z\,\mathrm{ch}\,z$

5) $v(x,y)=\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{ch}2y-\cos 2x}$, $x^2+y^2\neq 0$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

отг. $w=i\,\mathrm{cotg}\,z$

6) $v(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)+x-2y$, $x^2+y^2\neq 0$; $f(1)=i$

отг. $w=2i\ln z-(2-i)z+2$

7) $v(x,y)=-2\sin 2x.\mathrm{sh}2y+y$; $f(0)=2$ **отг.** $w=z+2\cos 2z$

8) $v(x,y)=2(\mathrm{chx}\sin y-xy)$; $f(0)=0$ **отг.** $w=2\mathrm{sh}\,z-z^2$

9) $v(x,y)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y$; $f(0)=2$ **отг.** $w=2\cos iz=2\,\mathrm{ch}\,z$

(***Упътване***: Първо преработете $v(x,y)$.)

10) $u(x,y)=e^{-y}\cos x+x$; $f(0)=1$ **отг.** $w=z+e^{iz}$

11) $u(x,y)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$; $f(0)=1$ **отг.** $w=\dfrac{1}{z+1}$

12) $u(x,y)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$; $f(0)=2$ **отг.** $w=2\cos i\,z=2\,\mathrm{ch}\,z$

13) $v(x,y)=e^{-y}\sin x+y$; $f(0)=1$ **отг.** $w=z+e^{iz}$

14) $v(x,y) = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}$; $f(0) = 1$ **отг.** $w = \dfrac{1}{z+1}$

15) $u(x,y) = 1 - e^x \sin y$; $f(0) = 1 + i$ **отг.** $w = 1 + i\,e^z$

16) $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + xy$, $x^2 + y^2 > 0$; $f(1) = \dfrac{i}{2}$

отг. $w = i\left(1 - \dfrac{z^2}{2} - \ln z\right)$

17) $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x \cos y$; $f(0) = 1$ **отг.** $w = z^2 + e^z$

18) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x\,\mathrm{sh}x \cos y - y\,\mathrm{ch}x \sin y$; $f(0) = 0$

отг. $w = z^3 + z\,\mathrm{sh}\,z$

19) $v(x,y) = e^x\left(y\cos y + x\sin y\right)$; $f(0) = 0$ **отг.** $w = ze^z$

20) $v(x,y) = 15x^2y - 5y^3 + \left(x^2 - y^2\right)\cos 3x\,\mathrm{sh}\,3y +$

$+2xy\sin 3x\,\mathrm{ch}\,3y$; $f(0) = 0$ **отг.** $w = z^2\left(5z + \sin 3z\right)$

VII. Изяснете съществуват ли хармонични функции от дадения по-долу вид (различни от константа) и, ако съществуват, ги намерете. Възстановете аналитичната функция, за която намерената хармонична функция е нейна реална (имагинерна) част:

1) $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Решение: Полагаме $\dfrac{y}{x} = t$. Тогава $u = \varphi(t)$. Намираме частните производни от първи и втори ред на тази съставна функция:

$$u_x = \varphi'(t)\left(-\frac{y}{x^2}\right);\ u_y = \varphi'(t)\frac{1}{x};$$

$$u_{xx} = \varphi''(t)\frac{y^2}{x^4} + \varphi'(t)\frac{2y}{x^3};\ u_{yy} = \varphi''(t)\frac{1}{x^2}.$$

Функцията $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ има непрекъснати първи и втори частни производни $(x \neq 0)$. Проверяваме кога тя удовлетворява уравнението на Лаплас:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \varphi''(t)\frac{y^2}{x^4} + \varphi'(t)\frac{2y}{x^3} + \varphi''(t)\frac{1}{x^2} = 0$$

или $\varphi''(t)\frac{x^2+y^2}{x^4} + \frac{2y}{x^3}\varphi'(t) = 0$. Умножаваме това равенство с y^2. Получаваме : $\varphi''(t).\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^4\right] + 2\left(\frac{y}{x}\right)^3.\varphi'(t) = 0$. Но $\frac{y}{x} = t$ и следователно $\varphi''(t)\left(t^2+t^4\right) + 2t^3\varphi'(t) = 0$. Разделяме диференциалното уравнение, което получихме, на $t^2 \neq 0$:

$$\left(t^2+1\right)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0.$$

Полагаме $\varphi'(t) = p(t)$. Тогава $\varphi''(t) = p'(t)$ и диференциалното уравнение се записва във вида: $\left(t^2+1\right)p'(t) + 2t\,p(t) = 0$. Това е уравнение с отделящи се променливи. Отделяме променливите:
$\frac{dp}{p} + \frac{2tdt}{t^2+1} = 0$. Интегрираме и получаваме

$$\ln|p| + \ln\left(t^2+1\right) = \ln|C_1| \text{ или } p = \frac{C_1}{t^2+1}.$$

Но $p = \varphi'(t) = \dfrac{C_1}{t^2+1}$, откъдето $\varphi(t) = C_1 \operatorname{arctg} t + C_2$.

И така $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = C_1 \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + C_2$, само в този случай удовлетворява уравнението на Лаплас и следователно е хармонична функция.

Оттук нататък задачата се решава по познатия вече начин.

отг. $w_1 = -iC_1 \ln z + C_2 + iC_3$; $\left(w_2 = C_1 \ln z + iC_2 - C_3\right)$

2) $u = \varphi(x)$

отг. $u = C_1 x + C_2$, $w_1 = C_1 z + C_2 + iC_3$; $\left(w_2 = iC_1 z - C_3 + iC_2\right)$

3) $u = \varphi(ax + by)$, $a, b \in \mathbb{R}$; $a^2 + b^2 \neq 0$

отг. $u = C_1(ax + by) + C_2, w_1 = C_1(a - ib)z + C_2 + iC_3$;

$\left(w_2 = C_1(b + ia)z + iC_2 - C_3\right)$

4) $u = \varphi\left(x^2 + y^2\right)$, $x^2 + y^2 \neq 0$

отг. $u = C_1 \ln\left(x^2 + y^2\right) + C_2$, $w_1 = 2C_1 \ln z + C_2 + iC_3$;

$\left(w_2 = 2C_1 i \ln z + iC_2 - C_3\right)$

5) $u = \varphi\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)$, $x^2 + y^2 \neq 0$

отг. $u = -\dfrac{C_1 x}{x^2 + y^2} + C_2$, $w_1 = -\dfrac{C_1}{z} + C_2 + iC_3$;

$\left(w_2 = -\dfrac{iC_1}{z} + iC_2 - C_3\right)$

6) $u = \varphi\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

отг. $u = 2C_1\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C_2$, $w_1 = 2\sqrt{2}\,C_1\sqrt{z} + C_2 + iC_3$;

$(w_2 = 2\sqrt{2}\,iC_1\sqrt{z} + iC_2 - C_3)$

(***Упътване***: За да определите $v(x, y)$ (за функцията w_1), интегрирайте $\frac{\partial v}{\partial x}$. Внесете под dx израз, равен на производната на подкоренния израз в $\frac{\partial v}{\partial x}$. За да намерите $\psi(y)$ (константата при интегрирането), преработете $v(x, y)$ като умножите числителя и знаменателя на v с корен, подкоренната величина на който е спрегната на тази във v. За да получите отговора в посочения вид, заместете $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и получете z в тригонометричен вид.)

7) $u = \varphi\left(x^2 + y\right)$ **отг.** не съществува

VIII. Намерете сумите на следните редове :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n \cos n\varphi$, $r < 1$ **отг.** $r\dfrac{\left(r^2+1\right)\cos\varphi - 2r}{\left(r^2 - 2r\cos\varphi + 1\right)^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n \sin n\varphi$, $r < 1$ **отг.** $\dfrac{r\left(1-r^2\right)\sin\varphi}{\left(r^2 - 2r\cos\varphi + 1\right)^2}$

(***Упътване*** за 1) и 2): Използвайте теоремата на Вайерщрас (теорема 7) и забележка 2 и диференцирайте почленно равенството $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$. Умножете двете страни на полученото равенство със z, заместете $z = re^{i\varphi}$ и приравнете Re и Im части в лявата и дясната му част.)

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \cos n\varphi,\ r < 1$

$$\textbf{отг. } r\left(r^2-1\right)\frac{3r-\left(r^2+1\right)\cos\varphi - r\cos 2\varphi}{\left(r^2-2r\cos\varphi+1\right)^3}$$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \sin n\varphi,\ r < 1$

$$\textbf{отг. } r\frac{\left(r^4-6r^2+1\right)\sin\varphi + r\left(r^2+1\right)\sin 2\varphi}{\left(r^2-2r\cos\varphi+1\right)^3}$$

§8. Конформно изображение

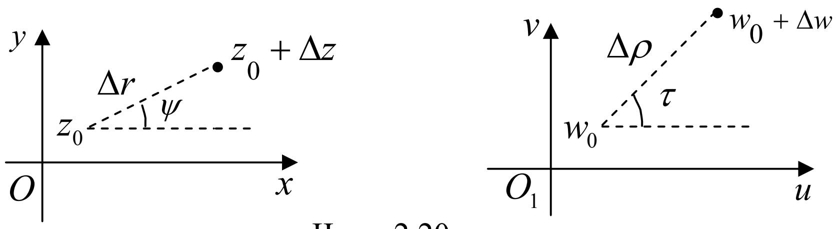
Нека функцията $w = f(z)$ е аналитична в точката z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Оттук следва, че производната $f'(z)$ съществува и е непрекъсната в някаква околност на точката z_0 (дефиниция 4, § 7).

За да изясним геометричния характер на изображението, осъществено посредством функцията $w = f(z)$, в комплексните равнини Z и W въвеждаме полярни координатни системи съответно:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ и } w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

При това положение (черт. 2.20)

(1) $$\Delta z = \Delta r(\cos\psi + i\sin\psi);\ \Delta w = \Delta\rho(\cos\tau + i\sin\tau);$$
$$f'(z) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ A > 0.$$



Черт. 2.20

От равенството $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

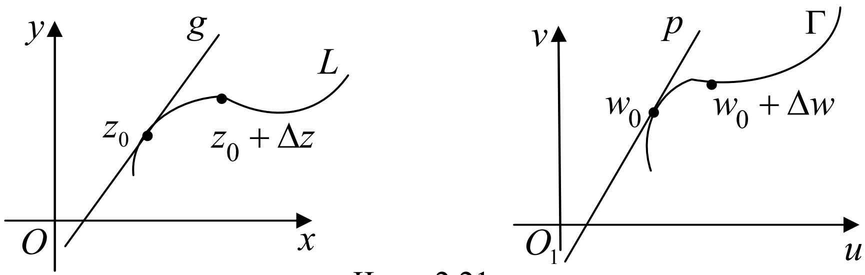
намираме

(2)
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = A = |f'(z_0)|;$$

(3)
$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \alpha = \arg f'(z_0).$$

Ще се спрем на геометричния смисъл на равенства (2) и (3).

Предполагаме, че в равнината Z точката $z_0 + \Delta z$ клони към точката z_0 по някаква непрекъсната крива L. Тогава в равнината W съответната точка $w_0 + \Delta w = f(z_0 + \Delta z)$ клони към точката $w_0 = f(z_0)$ по някаква крива Γ, която е образ на кривата L при изображението $w = f(z)$ (черт. 2.21).



Черт. 2.21

Ако кривата L е зададена с помощта на комплексно-параметричното уравнение $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$, където t е реална променлива, $t \in [t_0, T]$, и $z_0 = z(t_0)$, то уравнението на кривата Γ ще има вида $w = w[z(t)] = u(t) + i\,v(t)$, $w_0 = w(t_0)$.

Предполагаме, че кривата L има допирателна g в точката z_0. Това означава, че съществува крайна или безкрайна производна $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=t_0} = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$. Следователно производните $x'_t(t_0)$ и $y'_t(t_0)$ не могат да бъдат едновременно равни на нула. Тъй като $z'_t(t_0) = x'_t(t_0) + i\,y'_t(t_0)$, то $z'_t(t_0) \neq 0$. По правилото за диференциране на съставна функция, отчитайки, че $f'(z_0) \neq 0$, имаме $w'_t(t_0) = f'_z(z_0)\,z'_t(t_0) \neq 0$.

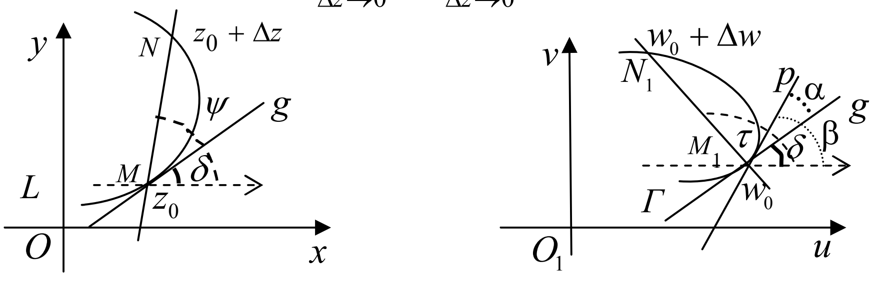
От съотношението $w'_t(t_0) = u'_t(t_0) + iv'(t_0)$ следва, че $u'_t(t_0)$ и $v'_t(t_0)$ не могат едновременно да се анулират; затова съществува крайна или безкрайна производна $\left(\dfrac{dv}{du}\right)_{t=t_0} = \dfrac{v'_t(t_0)}{u'_t(t_0)}$.

Оттук става ясно, че кривата Γ в точката $w_0 = f(z_0)$ също има допирателна - правата p. Тъй като ψ и τ са ъглите на наклона към осите Ox и O_1u на секущите, минаващи съответно през точките z_0, $z_0 + \Delta z$ и $w_0, w_0 + \Delta w$ на кривите L и Γ (вижте равенства (1)), то означавайки с δ и β ъглите на наклона на допирателните g и p съответно към осите Ox и O_1u (черт. 2.22), получаваме:

$$\delta = \lim_{\Delta z \to 0} \psi = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z$$

(4)

$$\beta = \lim_{\Delta z \to 0} \tau = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w .$$



Черт. 2.22

Отчитайки равенствата (4), от равенство (3) получаваме

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\arg \Delta w - \arg \Delta z \right) =$$

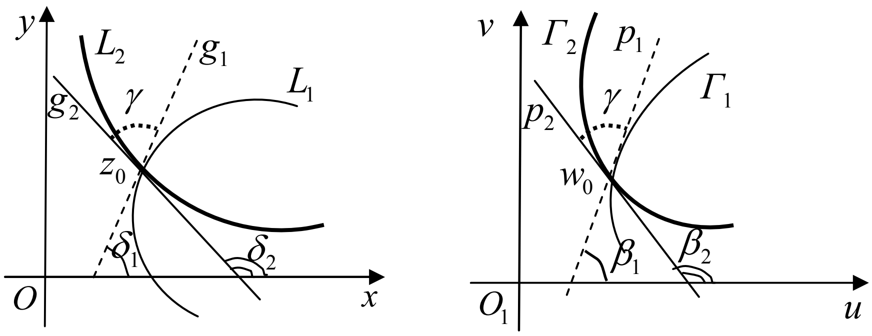
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \beta - \delta \text{, т.е.}$$

(5) $$\beta = \delta + \arg f'(z_0) .$$

От равенство (5) следва, че при преминаването от кривата L към нейния образ Γ, ъгълът δ на наклона на допирателната g в точката z_0 към кривата L се изменя с величината $\arg f'(z_0)$, която не зависи от избора на кривата L, минаваща през точката z_0. Следователно при изображението $w = f(z)$ допирателните към всички криви, минаващи през точка z_0, се завъртат на един и същи ъгъл и в една и съща посока на отчитане на ъглите.

Ако в комплексната равнина Z разгледаме две произволни криви L_1 и L_2, минаващи през точка z_0 и имащи в тази точка допирателни g_1 и g_2, наклонени към оста Ox под ъгли δ_1 и δ_2, то техните образи Γ_1 и Γ_2 при изображението $w = f(z)$ са криви, които минават през точката $w_0 = f(z_0)$, имат допирателни p_1 и

p_2 в тази точка и са наклонени към оста O_1u под ъгли β_1 и β_2 (черт. 2.23).



Черт. 2.23

Тъй като според (5) са в сила равенствата

(6)
$$\begin{aligned}\beta_1 &= \delta_1 + \arg f'(z_0)\\ \beta_2 &= \delta_2 + \arg f'(z_0)\end{aligned},$$

то

(7)
$$\beta_2 - \beta_1 = \delta_2 - \delta_1 .$$

От (7) следва, че ъгълът между кривите Γ_1 и Γ_2 в точката $w_0 = f(z_0)$ е равен (по големина и посока) на ъгъла между кривите L_1 и L_2 в точката z_0 (ъгъл γ, черт. 2.23).

По такъв начин, ако функцията $w = f(z)$ е аналитична в точката z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то всички криви в равнината Z, минаващи през z_0 и имащи допирателни в тази точка, се изобразяват посредством функцията $w = f(z)$ в криви в равнината W, минаващи през точката $w_0 = f(z_0)$ и също имащи допирателни в тази точка, при което ъглите между кривите в равнината Z и ъглите между техните образи в равнината W се запазват както по големина, така и по посока на тяхното отчитане.

Това свойство на изображението $w = f(z)$ се нарича *свойство за запазване на ъглите* (*консерватизъм на ъглите*) в точката z_0.

Следователно $\arg f'(z_0)$ *при* $f'(z_0) \neq 0$ *има следния геометричен смисъл*: всяка крива в равнината Z, минаваща през точка z_0 и имаща допирателна в тази точка, се завърта на един и същи ъгъл, равен на $\arg f'(z_0)$, при изображението $w = f(z)$.

Условието $f'(z_0) \neq 0$ е важно, тъй като само в този случай при изображението $w = f(z)$ в точката z_0 се запазват ъглите между първоначалните криви, минаващи през z_0, и изобразените (трансформираните) криви, минаващи през точка $w_0 = f(z_0)$.

Наистина нека разгледаме напр. функцията $w = z^n$, където $n = 2,3,\ldots$ Полагаме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогава $|w| = r^n$, $Arg\, w = n\varphi$.

Функцията $w = z^n$ има производна $w' = n z^{n-1}$ във всяка точка от равнината Z, като $w'(0) = 0$. От равенството $Arg\, w = n\varphi$ следва, че ако в равнината Z разгледаме два лъча, излизащи от началото на координатната система и образуващи помежду си ъгъл γ, то техните образи в равнината W с помощта на функцията $w = z^n$ ще бъдат криви, излизащи от точката $w = 0$ и образуващи помежду си ъгъл $n\gamma$, т.е. n пъти по-голям ъгъл от ъгъла γ. Следователно изображението $w = z^n$ $(n = 2,3,\ldots)$ не запазва ъглите в началото на координатната система.

Сега ще се спрем на *геометричния смисъл на модула на производната*. Съгласно равенство (2) имаме

$$A = \left| f'(z_0) \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Нека означим дължината на дъгата MN от кривата L с Δs, а дължината на дъгата M_1N_1 от кривата Γ - с $\Delta\sigma$ (черт. 2.22). Известно е, че

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta r|} = 1, \quad \lim_{\Delta \rho \to 0} \frac{\Delta \sigma}{|\Delta \rho|} = 1.$$

Затова можем да запишем

(8) $$A = \left| f'(z_0) \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta \rho}{\Delta r} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s}.$$

Последната граница се нарича *коефициент на разтягане* (*коефициент на линейното изменение*) *на кривата* L *в точката* z_0. Следователно разтягането показва колко пъти безкрайно малка дъга от кривата L е по-голяма (по-малка) от безкрайно малка дъга от кривата Γ.

От равенство (8) можем да направим заключението, че при изображението $w = f(z)$ модулът на производната е равен на разтягането на безкрайно малка дъга.

Ще отбележим, че ако $\left| f'(z_0) \right| > 1$, то безкрайно малката дъга при изображението се удължава, а ако $\left| f'(z_0) \right| < 1$, то тя се скъсява.

Тъй като производната не зависи от това по каква крива $z_0 + \Delta z \to z_0$, то всички безкрайно малки дъги, излизащи от точката z_0, при изображението $w = f(z)$ получават едно и също разтягане, равно на $\left| f'(z_0) \right|$.

Всичко изложено по-горе ще формулираме в следната теорема:

Теорема 1. Ако в точката z_0 производната на аналитичната функция $f(z)$ не е равна на нула, то всички безкрайно малки дъги, излизащи от точката z_0, при изображението $w=f(z)$ се завъртат на един и същи ъгъл, равен на аргумента на производната $\left(\arg f'(z_0)\right)$ и получават едно и също разтягане, равно на модула на производната $\left(\left|f'(z_0)\right|\right)$.

Възможна е и друга геометрична интерпретация на модула на производната на аналитичната функция $w=u(x,y)+iv(x,y)=$ $=f(z)$ в точка, в която $f'(z)\neq 0$. За да я получим, ще разгледаме областта D в равнината Z и нека функцията $w=f(z)$ я трансформира в областта G в равнината W. Лицето на G може да се пресметне с двойния интеграл $\iint\limits_G du\,dv$. Ще направим смяна на променливите в този интеграл, полагайки $u=u(x,y)$, а $v=v(x,y)$. Тогава, използвайки правилата за смяна на променливите в двоен интеграл, получаваме $\iint\limits_G du\,dv=\iint\limits_D |J|dx\,dy$, където якобиянът $J=\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$. Той дава коефициента на разтягане на лицето в дадена точка при това преобразование. Но ако се възползваме от условията на Коши - Риман, получаваме

$$J=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left|f'(z)\right|^2.$$

Оттук виждаме, че при изображение с помощта на аналитичната функция $f(z)$ коефициентът на разтягане на лицето в някаква точка е равен на квадрата на модула на производната на $f(z)$ в тази точка, ако в нея $f'(z)\neq 0$.

Дефиниция 1. Изображението $w = f(z)$ се нарича *конформно* (т.е. запазващо формата) в точка z_0, ако то притежава свойството да запазва ъглите и коефициента на разтягане в точката z_0.

Имайки предвид горните резултати, можем да формулираме следната теорема:

Теорема 2. Нека функцията $w = f(z)$ е аналитична в точката z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогава изображението $w = f(z)$ е конформно в тази точка.

Нека функцията $f(z)$ е аналитична в точка z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Да разгледаме изображението $w = \overline{f(z)}$. Това изображение очевидно може да се разглежда като суперпозиция на следните изображения $\zeta = f(z)$ и $w = \overline{\zeta}$.

Първото изображение по теорема 2 е конформно в точка z_0. При второто изображение ъглите се запазват по големина, но посоката им се променя на противоположна.

Дефиниция 2. Изображение, осъществявано с помощта на функцията $w = f(z)$, се нарича *антиконформно или конформно изображение от втори род в точка* z_0, ако то запазва коефициента на разтягане и големината на ъглите в точката z_0, но променя посоката им на противоположна.

И така всяко изображение $w = \overline{f(z)}$, където $f(z)$ е аналитична в точка z_0 функция и $f'(z_0) \neq 0$, е антиконформно в z_0.

Нека сега функцията $f(z)$ е дефинирана в някаква област D от равнината Z.

Дефиниция 3. Взаимно еднозначното изображение $w = f(z)$ на областта D върху областта G се нарича *конформно в областта* D, ако то е конформно във всяка точка на областта D.

Теорема 3. Нека функцията $f(z)$ е еднолистна (т.е. тя е еднозначна и в различни точки на D приема различни стойности), аналитична в областта D и $f'(z) \neq 0$ за $z \in D$. Тогава изображението $w = f(z)$ е конформно в областта D.

Доказателство: Поради условието $f'(z) \neq 0$ при $z \in D$ изображението $w = f(z)$ притежава свойството да запазва ъглите и коефициента на разтягане във всички точки на областта D, т.е. е конформно във всяка точка от тази област. Еднолистността на функцията $w = f(z)$ в областта D обезпечава взаимната еднозначност (биективността) на изобразяването на областта D в областта G чрез стойностите на функцията $w = f(z)$.

Следователно изображението $w = f(z)$ е конформно в D.

От теорема 3 следва , че условията аналитичност, еднолистност и отличието от нула на производната на функция на комплексна променлива са достатъчни условия за конформност на изображението, осъществявано от тази функция.

Оказва се, че тези условия са и необходими за конформността на изображението.

Теорема 4. Ако функцията $w = f(z)$ осъществява конформно изображение на областта D от равнината Z в областта G от равнината W и е ограничена в D, то функцията $f(z)$ е еднолистна и аналитична в областта D, при това $f'(z) \neq 0$ за $z \in D$.

Доказателство: От предположението, че функцията $w = f(z)$ е ограничена в областта D, следва, че за $\forall z \in D$ и $z + \Delta z \in D$, съществува крайно $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$. Тъй като, съгласно условията на теоремата, изображението $w = f(z)$ е конформно в областта D, то във всяка точка $z_0 \in D$ изображението $w = f(z)$ запазва ъглите и постоянен коефициент на разтягане. Следователно от (2) и (3) са в сила съотношенията (с точност до безкрайно малки величини)

(9) $$\arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha$$

и

(10) $$\left|\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}\right| = \left|\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}\right| = A \neq 0$$

(вследствие произволния избор на точките $z_2 + \Delta z_2$ и $z_1 + \Delta z_1$ от околността на точката z_0).

От съотношения (9) и (10) с точност до безкрайно малки величини се изпълнява съотношението

(11) $$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = Ae^{i\alpha}\,.$$

Тъй като $z_1 = z_0 + \Delta z_1$ и $z_2 = z_0 + \Delta z_2$ са произволни точки, лежащи в достатъчно малка околност на точката z_0, то от (11) получаваме, че съществува границата на отношението $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$. По дефиниция (§ 7) тази граница е производната на функцията $w = f(z)$ в точката z_0. Тъй като $A \neq 0$, то тази производна е различна от нула. Следователно

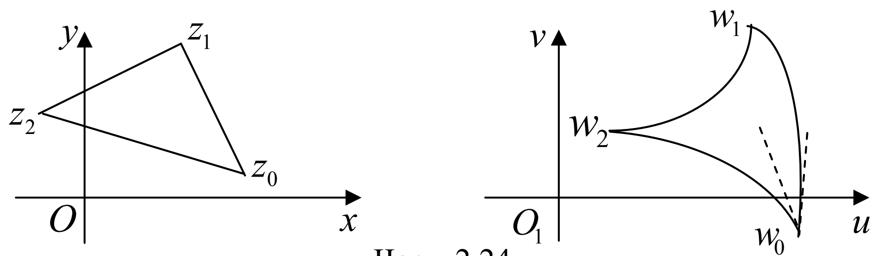
(12) $$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0\,.$$

Точка z_0 е произволна точка от областта D; затова от (12) следва, че функцията $f(z)$ е аналитична в областта D и $f'(z) \neq 0$ за $z \in D$. Еднолистността на функцията $w = f(z)$ следва от взаимната еднозначност на изображението $w = f(z)$.

И така теоремата е напълно доказана.

Въз основа на теореми 3 и 4 стигаме до следния *извод*: за да реализира функцията $w = f(z)$ конформно изображение на областта D, е необходимо и достатъчно функцията $f(z)$ да е еднолистна, аналитична в тази област и навсякъде в D производната ѝ $f'(z) \neq 0$.

Нека в точка z_0 от равнината Z да вземем безкрайно малък триъгълник $z_0 z_1 z_2$. При изображението $w = f(z)$ неговите страни ще се изкривят (черт. 2.24), но поради техните малки размери, пренебрегвайки изкривяването, можем да приемем, че образът на нашия триъгълник в равнината W е безкрайно малкият триъгълник $w_0 w_1 w_2$.



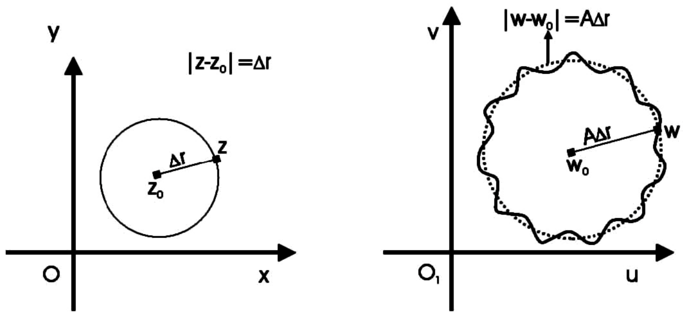
Черт. 2.24

Съгласно теорема 1 имаме, че

$$\frac{\text{дълж.}\,\overset{\frown}{w_0 w_1}}{\text{дълж.}\,\overline{z_0 z_1}} \approx \frac{\text{дълж.}\,\overset{\frown}{w_0 w_2}}{\text{дълж.}\,\overline{z_0 z_2}} \approx \left| f'(z_0) \right| \text{ и}$$

$\sphericalangle z_1 z_0 z_2 = \sphericalangle w_1 w_0 w_2$. Следователно можем да смятаме, че безкрайно малките триъгълници са подобни.

Аналогично, ако разгледаме безкрайно малка окръжност с център в точката z_0 и прекараме радиусите $z_0 z_1, z_0 z_2, \ldots$, то при изображението $w = f(z)$ те ще се завъртят на един и същи ъгъл и ще получат едно и също разтягане. Следователно тази безкрайно малка окръжност ще се преобразува в крива, която можем да приемем за окръжност, пренебрегвайки безкрайно малките величини от по-висок ред (черт. 2.25).



Черт. 2.25

Забележка. При изображение с аналитичната в D функция $f(z)$, за която $f'(z) \neq 0$ за $\forall z \in D$, фигурите, лежащи в D, макар и да се изобразяват конформно, не се изобразяват в подобни фигури. Причината за това е, че линейният коефициент $|f'(z)|$ за различни точки на D е различен.

Примери: 1) Да разгледаме изображението $w = z^3 - 3z$. Производната $w' = 3(z^2 - 1)$ е равна на нула в точките $z = 1$ и $z = -1$. В останалите точки $w' \neq 0$. Следователно изображението е конформно във всички точки от комплексната равнина Z, различни от ± 1. Например то е конформно в точките $z = 2$ и $z = i$. В първата от тях $w' = 9$, т.е. аргументът на производната е нула, а модулът ѝ е равен на 9; затова безкрайно малките дъги, излизащи от точка $z = 2$ при изображението не се завъртат, а по дължина се увеличават 9 пъти. В точката $z = i$ производната $w' = -6$; значи, аргументът на производната е равен на π, а модулът - на 6; затова безкрайно малките дъги, излизащи от точката $z = i$, при изображението се завъртат на ъгъл π и се удължават 6 пъти.

2) Да разгледаме изображението $w = z^2$.

а) Нека от началото на координатната система в равнината Z излиза лъчът $L \equiv y = kx$, където $k = tg\,\varphi$, а φ е ъгълът, който лъчът сключва с положителната посока на оста Ox. Отделяме в изображението w реалната от имагинерната част: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ и заместваме в получените равенства $y = kx$. Имаме:

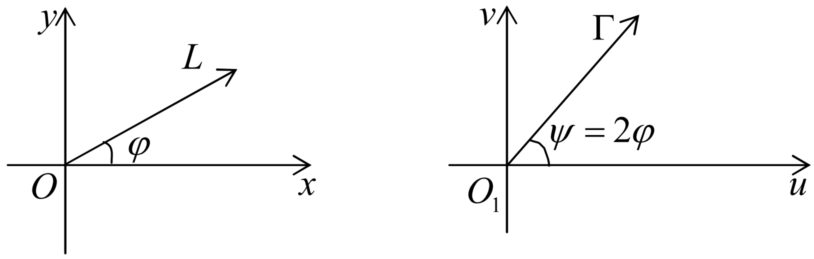
$$\begin{cases} u = x^2 - k^2x^2 = \left(1 - k^2\right)x^2 \\ \qquad v = 2x.kx = 2k\,x^2 \end{cases}.$$

Заместваме $x^2 = \dfrac{v}{2k}$ от второто равенство в първото: $u = \left(1 - k^2\right)\dfrac{v}{2k}$ или $v = \dfrac{2k}{1 - k^2}u$. Това е също уравнение на лъч Γ, излизащ от началото O_1 на координатната система в равнината W. Ъгловият коефициент на този лъч е

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{2k}{1 - k^2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 - \mathrm{tg}^2\varphi} = \mathrm{tg}\,2\varphi, \text{ т.е. } \psi = 2\varphi.$$

Следователно ъгълът ψ, който трансформираният лъч сключва с положителната посока на оста O_1u, е два пъти по-голям от φ (черт. 2.26), т.е. ъгълът между лъчите O_1u и Γ е два пъти по-голям, отколкото ъгъла между лъчите Ox и L. Това е така, защото

$w' = 2z$ и $w'(0) = 0$, т.е. изображението $w = z^2$ не е конформно в точката $z = 0$.



Черт. 2.26

б) Нека сега видим в каква област функцията $w = z^2$ ще изобрази първи квадрант: $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$. Тъй като функцията $w = z^2$ трансформира лъч в лъч, но ъгълът на наклона при това се удвоява, когато лъчите са с начало в точка $z = 0$, то в равнината W ъгълът на наклона на лъча-образ се изменя от 0 до π, т.е. ще се получи цялата горна полуравнина. Следователно функцията $w = z^2$ изобразява първи квадрант на Z в горната полуравнина на W.

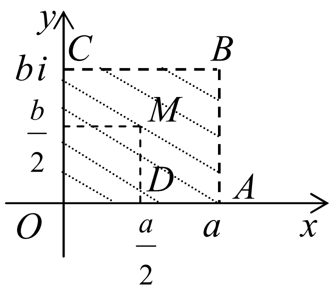
Аналогично функцията $w = z^2$ ще изобрази горната полуравнина на Z $(0 < \arg z < \pi)$ в равнината W с разрез по положителната реална ос O_1u, т.е. в равнината W, от която са махнати точките на тази полуос. Това е така, защото двата лъча с ъгъл на наклона към оста Ox $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ не са включени в горната полуравнина на Z, а те при трансформацията с $w = z^2$ се привеждат в лъчи с наклони $\psi = 0$ и $\psi = 2\pi$, които също не принадлежат на W. И затова се получава разрезът.

в) Да се покаже в каква област G от равнината W се трансформира областта

$$D \equiv \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \end{cases}$$

чрез функцията $w = z^2$.

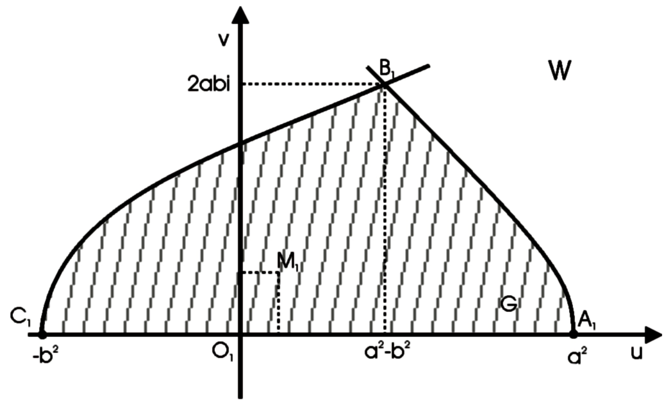
Решение: Областта D представлява вътрешността на един правоъгълник от равнината Z, разположен в първи квадрант с връх в началото O и страни по координатните оси, равни на a, съответно b (черт. 2.27). Функцията $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ е аналитична и $w' = 2z \neq 0$ при $z \neq 0$.



Черт. 2.27

1^0) Трансформираме $OC \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 0 < y < b \end{cases}$. Получаваме $\begin{cases} u = -y^2 \\ v = 0 \end{cases}$, като $-b^2 < u < 0$, т.е. на страната OC от Z отговаря O_1C_1 от W (черт. 2.28).

2^0) $\quad CB \equiv \begin{cases} 0 < x < a \\ y = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = x^2 - b^2 \\ v = 2bx \end{cases}$. Като елиминираме x, получаваме $u = \dfrac{v^2}{4b^2} - b^2$ или $v^2 = 4b^2\left(u + b^2\right)$, т.е. на страната CB от Z отговаря дъгата от параболата $v^2 = 4b^2\left(u + b^2\right)$ между $C_1\left(w = -b^2\right)$ и $B_1\left(w = a^2 - b^2 + 2abi\right)$ (черт. 2.28).



Черт. 2.28

$$3^0)\quad AB \equiv \begin{cases} x = a \\ 0 < y < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = a^2 - y^2 \\ v = 2ay \end{cases} \text{ или } u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2},$$

откъдето $v^2 = -4a^2\left(u - a^2\right)$, т.е. на страната AB от Z отговаря дъгата от параболата $v^2 = -4a^2\left(u - a^2\right)$ между B_1 и $A_1\left(w = a^2\right)$ (черт. 2.28).

$$4^0)\quad OA \equiv \begin{cases} 0 < x < a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ v = 0 \end{cases} \text{ или } 0 < u < a^2, \text{ т.е. на}$$

страната OA от Z отговаря O_1A_1 от W (черт. 2.28).

Ако вземем точка $M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, вътрешна за областта D, то тя ще се трансформира в точка $M_1\left(\frac{a^2 - b^2}{4}, \frac{ab}{2}\right)$ (черт. 2.28), която също е вътрешна за областта G. Т.е. вътрешността на правоъгълника D се е трансформирала във вътрешността на областта G на черт. 2.28. Но докато във върховете C_1, A_1, B_1 изображението е конформно и ъглите там са се запазили равни на $\frac{\pi}{2}$, то в точката $O\left(z=0\right)$ тази конформност е нарушена, тъй като $w' = 2z\big|_{z=0} = 0$. При трансформацията тя е преминала в точка O_1, а лъчите OA и OC, ъгълът между които е $\frac{\pi}{2}$, са се трансформирали в лъчите O_1A_1 и O_1C_1 с ъгъл между тях π, т.е. два пъти по-голям, както се и очакваше. Разбира се, с изключение на точката $O\left(z=0\right)$, във всички други точки по контура, заграждащ правоъгълника $OABC$, и във всички негови вътрешни точки изображението $w = z^2$ е конформно.

Сега ще си поставим такава *задача*: да намерим функцията $w = f\left(z\right)$, която еднолистно и конформно да изобразява дадена област D в друга дадена област G.

Тази задача не винаги има решение. Например може да се докаже, че многосвързаната област D не може еднолистно и конформно да се изобрази в едносвързаната област G. По друг начин стои въпросът с едносвързаните области. За тях са в сила следните *основни принципи на конформните изображения*, които ще дадем без доказателство:

Теорема 5. (Риман) Всяка едносвързана област D от равнината Z, границата на която се състои от повече от една точка, може конформно да се изобрази във вътрешността на единичния кръг $|w|<1$ от равнината W.

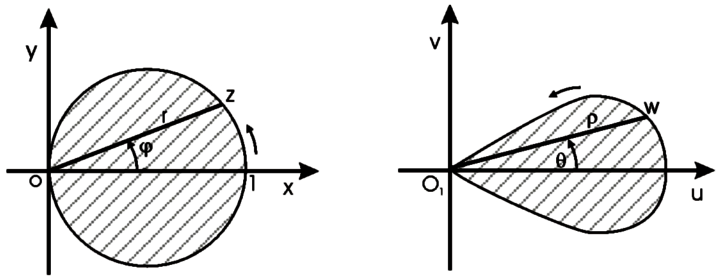
Теорема 6. (*Единственост на изображението*) Функцията $w = f\left(z\right)$, осъществяваща конформното изображение на дадена едносвързана област D, границата на която се състои от повече от една точка, в единичния кръг $|w|<1$, така че $f(z_0)=0$ и $\arg f'(z_0)=\alpha$ ($z_0 \in D$, а α е дадено реално число), е единствена.

Теорема 7. (*Принцип на взаимно еднозначно съответствие на границите (контурите)*) Нека в ограничената едносвързана област D с контур L е зададена аналитичната функция $w=f(z)$, непрекъсната в $\overline{D}$ и осъществяваща взаимно еднозначно изображение на контура L върху някакъв контур Γ от равнината W. Тогава, ако при зададеното изображение на контурите се запазва една и съща посока на обхождане на тези контури, то функцията $w=f(z)$ осъществява конформно (и еднолистно) изображение на областта D във вътрешността на областта G, ограничена от контура Γ.

Следователно, за да се определи образът G на дадената област D при изображението с аналитичната функция $w=f(z)$, е достатъчно да се намери образът на границата L на областта D - кривата Γ, и да се уеднакви посоката на обхождане.

Пример 3. Да се намери областта G, в която функцията $w=\sqrt{z}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$, $\varphi=\arg z$, (еднолистна, тъй като се получава само при $k=0$ във формулата за $\sqrt[n]{z}$, $n=2$) конформно изобразява областта D, ограничена от окръжността $L \equiv r=\cos\varphi$.

Решение: Означаваме с ρ и θ полярните координати в равнината W. Тогава $\rho=\sqrt{r}$, а $\theta=\frac{\varphi}{2}$, където $-\frac{\pi}{2}<\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Получаваме $\rho=\sqrt{\cos\varphi}=\sqrt{\cos 2\theta}$, което е уравнението на лемниската на Бернули. Следователно окръжността $r=\cos\varphi$ се е трансформирала в лемнискатата $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, като при това се е запазило положителното описване на окръжността и лемнискатата. Тогава според принципа за взаимното съответствие на границите (контурите) заключаваме, че функцията $w = \sqrt{z}$ осъществява конформно (и еднолистно) изображение на вътрешността на разглежданата окръжност във вътрешността на лемнискатата (черт. 2.29).



Черт. 2.29

Ще се спрем на най-простите конформни изображения, извършвани с помощта на елементарните функции. Поради съкратения курс ще се спрем само на линейните и дробно-линейните функции.

1) Линейна функция. Съотношението

(13) $$w = az + b,$$

където a и $b \in \mathbb{C}$ са константи, $a \neq 0$, се нарича *линейна функция*.

Изображението с помощта на линейната функция (13) е еднолистно в равнината Z, а приемайки, че $w = \infty$ при $z = \infty$, става еднолистно и в разширената равнина $\overline{Z}$. Линейното изображение (13) е конформно в Z, тъй като във всички нейни точки $w' = a \neq 0$.

Ще бъде ли изображението конформно и в точката $z = \infty$?

За решаването на този въпрос трябва да се въведе понятието ъгъл между две линии в безкрайно отдалечената точка, при което е достатъчно да се ограничим с ъгъла между две прави (знаем, че за ъгъл между две криви в точката на пресичането им се приема ъгълът между допирателните към кривите в тази точка).

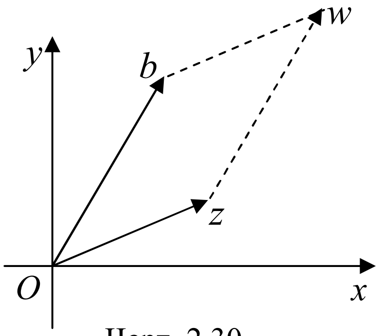
И така за *ъгъл между две пресичащи се прави в точката* $z=\infty$ по дефиниция приемаме ъгъла между тях в крайната точка на тяхното пресичане, взет с противоположен знак, а за *ъгъл между две успоредни прави в точката* $z=\infty$ приемаме ъгъл, равен на нула.

При такова дефиниране на ъгъл между две прави в безкрайно отдалечената точка линейното изображение (13) ще притежава свойството консерватизъм (запазване) на ъглите и в точката $z=\infty$, т.е. ще бъде конформно и в разширената комплексна равнина $\overline{Z}$. Наистина при това изображение две прави, пресичащи се в точките z_0 и $z=\infty$, ще се трансформират в две прави от разширената равнина $\overline{W}$, пресичащи се съответно в точките w_0 и $w=\infty$. Ъгълът между правите в точката $w=\infty$ е равен на ъгъла между тях в точката w_0 с противоположен знак, т.е. е равен на ъгъла между правите в точката z_0 с противоположен знак (поради конформността на линейното изображение във всяка крайна точка) и е равен на ъгъла между правите в точката $z=\infty$. Ако пък правите са успоредни, то те се трансформират с линейното изображение (13) отново в успоредни прави (Докажете!) и следователно ъгълът между тях в точката $z=\infty$ се запазва.

Ще разгледаме поотделно *частните случаи* на линейното изображение (13):

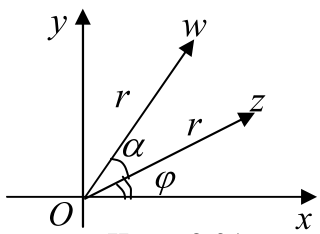
1) Нека $a=1$. Тогава $w=z+b$, където b е комплексно число. Тъй като геометрично комплексните числа се събират по правилото на успоредника, то при изображението $w=z+b$ всяка точка z се премества на вектор $\vec{b}$ (черт. 2.30). Ясно е, че тогава на този вектор се премества всяка крива и всяка област. Преобразованието $w=z+b$ осъществява *транслация*.

2) Нека сега $b=0$, а $a=e^{i\alpha}\neq 0$, α е реално число. Тогава $w=e^{i\alpha}z$. Записваме z в тригонометричен вид: $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=re^{i\varphi}$ (по Ойлер). Следователно $w=e^{i\alpha}re^{i\varphi}$ или $w=re^{i(\varphi+\alpha)}$, т.е. $|w|=|z|=r$, а $\arg w=\varphi+\alpha=\arg z+\alpha$. По такъв начин при преминаването от z към w модулите не се променят, а аргументът се изменя с ъгъл α (черт. 2.31). Ако двете равнини-равнината на аргумента z и равнината на функцията w наложим една върху друга, така че координатните оси да съвпаднат, то ще видим, че точката w се получава чрез завъртане на точката z около началото на координатната система на ъгъл α. Прилагайки това изображение към всяка точка от крива или област, става ясно, че те също се завъртат около началото на координатната система на ъгъл α. Следователно изображението $w=e^{i\alpha}z$ осъществява *ротация*.



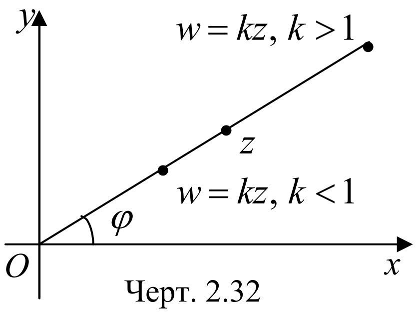
Черт. 2.30

3) Нека $b=0$, а $a=k>0$ (реално число). Тогава $w=kz$. Полагайки и тук $z=re^{i\varphi}$ получаваме $w=kre^{i\varphi}$, т.е. $|w|=kr$, а $\arg w=\varphi=\arg z$. Виждаме, че модулът се е увеличил k пъти ($k>1$) или намалил k пъти ($k<1$), а аргументът не се е променил. Следователно точката w се получава чрез преместване на точката z по лъча, съединяващ я с началото на координатната система, така че разстоянието от началото на



Черт. 2.31

координатната система се изменя k пъти (черт. 2.32). Подлагайки на такова изображение всяка точка от крива или област, е ясно, че те ще преминат в подобна крива или подобна област. Затова изображението $w = kz$, $k > 0$, се нарича *подобие (хомотетия)*. Точката $z = 0$ се нарича *център на подобието*, а числото k - *коефициент на подобието (хомотетията)*.



Черт. 2.32

В *общия случай*, полагайки в (13) $a = ke^{i\alpha}$, получаваме $w = ke^{i\alpha}z + b$. Очевидно точката w може да се получи в три стъпки: отначало намираме точката $w_1 = e^{i\alpha}z$ чрез ротация на точката z на ъгъл α около точката $z = 0$, после намираме точката $w_2 = kw_1$ чрез подобие на точката w_1 с център на подобието $z = 0$ и коефициент на подобието k и накрая намираме търсената точка $w = w_2 + b$ чрез транслация на w_2 на вектор $\vec{b}$. (Може първо да се използва подобието, а после ротацията и накрая транслацията.)

Следователно всяко линейно изображение може да се раздели на ротация, подобие и транслация.

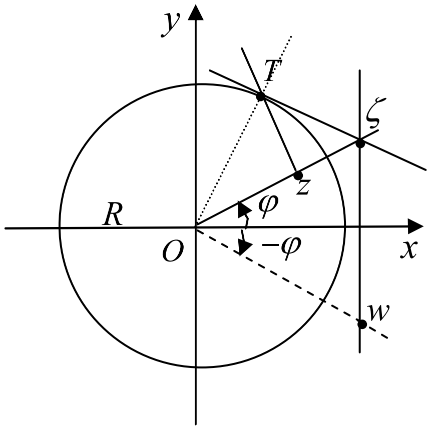
2) Функция $w = \dfrac{R^2}{z}$. Полагаме $z = re^{i\varphi}$. Тогава $w = \dfrac{R^2}{r}e^{-i\varphi}$. Оттук $|w| = \dfrac{R^2}{r} = \dfrac{R^2}{|z|}$, а $\arg w = -\varphi = -\arg z$.

Следователно аргументът сменя знака си, а $|w|.|z| = R^2$, т.е. произведението от разстоянията на точките z и w до началото на координатната система е равно на квадрата на радиуса на окръжността $|z| = R$.

Дефиниция 4. Две точки z и ζ се наричат *инверсни* (*симетрични)* спрямо дадена окръжност $L \equiv |z-a| = R$, ако лежат на един и същи лъч с начало центъра $z = a$ на окръжността L и произведението на разстоянията им до центъра на L е равно на квадрата R^2 на радиуса на тази окръжност, т.е. $|z-a|.|\zeta - a| = R^2$. (L се нарича *инверсна окръжност*.)

Дефиниция 5. Изображението, което трансформира всяка точка z_1 от дадена равнина в точка z_2, симетрична на нея относно някаква окръжност, се нарича *симетрия относно тази окръжност* или *инверсия.*

Най-напред ще дадем един алгоритъм за намиране на инверсния образ на дадена точка z спрямо окръжност с радиус R. Ще приемем, без това да променя същността, че центърът на окръжността е в началото на координатната система, т.е. $a = 0$.



Черт. 2.33

Нека точката z се намира вътре в окръжността $L \equiv |z| = R$, но $z \neq 0$. Издигаме перпендикуляр от z към правата Oz и намираме пресечните му точки с окръжността $|z| = R$. В една от тези точки, напр. T, прекарваме тангентата към окръжността. Тогава пресечната точка ζ на тази тангента с правата Oz е търсената инверсна точка на z. Наистина (черт. 2.33) $\Delta O\zeta T$ е правоъгълен $\left(\measuredangle OT\zeta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $Tz \perp O\zeta$. Следователно Oz е проекцията на катета OT върху хипотенузата $O\zeta$. Тогава по известна теорема от елементарната геометрия имаме $OT^2 = O\zeta.Oz$. Но $OT = R$, $O\zeta = |\zeta|$ и $Oz = |z|$. Следователно $R^2 = |z|.|\zeta|$.

Тъй като точките z и ζ лежат на един и същи лъч с начало $z = 0$ и е в сила горното равенство, то тези точки са инверсни спрямо окръжността $L \equiv |z| = R$

Ако пък z е външна за окръжността $L \equiv |z| = R$, постъпваме по обратния път - прекарваме допирателната от z към окръжността и от допирната точка спускаме перпендикуляр към правата Oz. Търсената точка ζ е пресечната точка на перпендикуляра с Oz.

От алгоритъма, а и от самата дефиниция на инверсна точка, е ясно, че инверсният образ на точката, която лежи вътре в окръжността L, е точка вън от окръжността и обратно. Следователно инверсията преобразува вътрешността на окръжността във външността ѝ и обратно.

Инверсният образ на дадена точка от окръжността $|z| = R$ съвпада със самата точка, тъй като $|z|.|z| = R^2$. Оказва се, че инверсната окръжност се трансформира в себе си.

От дефиницията на инверсия следва, че когато една точка се приближава към центъра на окръжността, нейният инверсен образ се отдалечава, т.е. когато $|z| \to 0$, то $|\zeta| \to \infty$ и обратно. Следователно инверсната точка на центъра на инверсната окръжност е безкрайната точка и обратно.

Но търсената точка беше w, а не ζ. Отчитайки, че аргументът на w е противоположен по знак на аргумента на z, то w ще бъде точка, симетрична на ζ относно реалната ос Ox (черт. 2.33).

Ако пък точка z лежи на окръжността $L \equiv |z| = R$, то $z = Re^{i\varphi}$ и следователно $w = Re^{-i\varphi} = \bar{z}$, т.е. w е симетрична на z относно реалната ос.

И така от всичко казано до тук е ясно, че изображението $w = \frac{R^2}{z}$ е еквивалентно на инверсия спрямо окръжността $|z| = R$ и симетрия относно реалната ос.

Тъй като производната на $w = \frac{R^2}{z}$ е $w' = -\frac{R^2}{z^2} \neq 0$ и тя съществува и е крайна навсякъде, освен в точките $z = 0$ и $z = \infty$, то изображението $w = \frac{R^2}{\bar{z}}$ е очевидно конформно в разширената комплексна равнина $\bar{Z}$, изключвайки споменатите точки. Може да се докаже, че то е конформно и в тези две точки, имайки предвид дефиницията на ъгъл между две прави в безкрайно отдалечената точка.

Дефиниция 6. *Окръжност в широк смисъл* се нарича крива, дефинирана с уравнението:

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0;$$

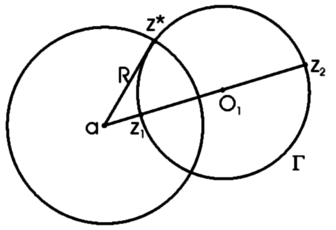
при $A \neq 0$ - това е окръжност, при $A = 0$ - права.

Симетрия на две точки относно права в равнината Z ще разбираме в обичайния смисъл на това понятие.

В сила е следната теорема:

Теорема 8. За да бъдат точките z_1 и z_2 симетрични относно окръжността $|z - a| = R$, е необходимо и достатъчно всяка окръжност в разширената комплексна равнина, минаваща през точките z_1 и z_2, да е ортогонална на окръжността $|z - a| = R$.

Доказателство: *Необходимост*: Нека точките z_1 и z_2 са симетрични относно окръжността $|z-a|=R$ и Γ е произволна окръжност, минаваща през точките z_1 и z_2. Нека z^* е коя да е от точките на пресичане на окръжността $|z-a|=R$ с Γ (черт. 2.34). Тъй като точките z_1 и z_2 са симетрични (инверсни) относно окръжността $|z-a|=R$, то $|z_1-a|.|z_2-a|=R^2$.

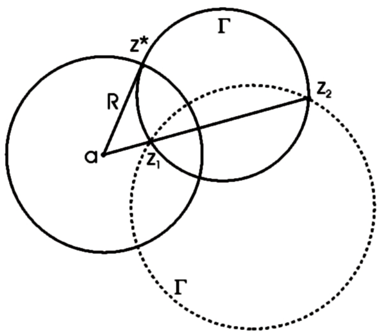


Черт. 2.34

Въз основа на това равенство, по известна теорема от геометрията (произведението на отрезите от секущата, прекарана от външна точка на окръжността, е равно на квадрата на частта от допирателната, прекарана от същата точка), заключаваме, че радиусът $az^*=R$ на окръжността $|z-a|=R$ се допира в точката z^* към окръжността Γ и следователно окръжността Γ е ортогонална на окръжността $|z-a|=R$. Необходимостта е доказана.

Достатъчност: Нека всяка окръжност Γ, минаваща през точките z_1 и z_2, е ортогонална на окръжността $|z-a|=R$. Прекарваме права през точките a и z_1 (черт. 2.35). Тъй като в разширената комплексна равнина правата се разглежда като окръжност, минаваща през безкрайно отдалечената точка, то точката z_2 също трябва да лежи на тази права.

Означаваме със z^* една от точките на пресичане на Γ с окръжността $|z-a|=R$. Тогава допирателната az^* към окръжността Γ е радиус на окръжността $|z-a|=R$. По същата теорема от геометрията имаме $|z^*-a|^2=|z_1-a|.|z_2-a|=R^2$.



Черт. 2.35

Оттук следва, че точките z_1 и z_2 са симетрични (инверсни) относно окръжността $|z-a|=R$.

Теоремата е доказана.

Теорема 8 е в сила и ако окръжността $|z-a|=R$ заменим с права. В този случай симетрията (инверсията) относно окръжност се превръща в обикновена симетрия.

3) Дробно-линейна функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Дробно-линейната функция на комплексната променлива z се определя в разширената комплексна равнина $\overline{Z}$ с равенството

(14) $$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0, c\neq 0)^{38},$$

където a,b,c,d са комплексни константи; освен това приемаме, че $w=\infty$ при $z=-\dfrac{d}{c}$ и $w=\dfrac{a}{c}$ при $z=\infty$.

Преобразуваме равенство (14) :

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{acz+bc}{c(cz+d)}=\frac{acz+ad+bc-ad}{c(cz+d)}=$$

[38] При $ad-bc=0$ имаме $a=\lambda c$, $b=\lambda d$ $(\lambda=const)$ и функцията (14) се превръща в константата: $w=\lambda$; при $c=0$ (14) става линейна функция.

$$=\frac{a(cz+d)+(bc-ad)}{c(cz+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d}.$$

Оттук следва, че дробно-линейното изображение е суперпозиция на три изображения: **а)** $w_1 = cz + d$,

б) $w_2 = \dfrac{1}{w_1}$ и

в) $w = \dfrac{bc-ad}{c} w_2 + \dfrac{a}{c}$.

Изображенията а) и в) са линейни, а изображението б) с $R = 1$ разгледахме в п. 2). Следователно дробно-линейното изображение се свежда до преобразованията транслация, подобие, ротация, инверсия и последвалото го огледално изображение относно реалната ос.

Например $w = \dfrac{z+i}{z-i} = 1 + \dfrac{2i}{z-i} = 1 + e^{\frac{\pi}{2}i} \dfrac{2}{z-i}$. За да получим точката w трябва да придвижим точката z надолу на една единица, получената точка да подложим на инверсия относно окръжността $|z| = \sqrt{2}$ и после да я отразим симетрично относно реалната ос, след това новополучената точка да завъртим около координатното начало на ъгъл $\dfrac{\pi}{2}$ и най-накрая да направим транслация на вектор 1, т.е. преместване на една единица вдясно успоредно на оста Ox.

Свойства на дробно-линейните изображения

Със следващите теореми ще дадем някои свойства на дробно-линейните изображения.

Теорема 9. Дробно-линейното изображение изобразява взаимно еднозначно и конформно разширената комплексна равнина $\overline{Z}$ в разширената комплексна равнина $\overline{W}$.

Няма да се спираме на доказателството на тази теорема.

Дефиниция 7. *Двойно отношение на четири точки* $(a,b;c,d)$ се нарича изразът

(15)
$$(a,b;c,d)=\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}.$$

Теорема 10. При дробно-линейното изображение двойното отношение на четири точки не се променя.

Доказателство: Ще разгледаме в равнината Z четири точки z_1, z_2, z_3, z_4. Преобразуваме ги с функцията $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ и получаваме четирите точки $w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$ $(k=1,2,3,4)$ в равнината W. Трябва да докажем, че $(z_1,z_2;z_3,z_4)=(w_1,w_2;w_3,w_4)$, т.е. според (15), че

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}:\frac{w_1-w_4}{w_2-w_4}.$$

Замествайки в горното равенство

$$w_k-w_j=\frac{(ad-bc)(z_k-z_j)}{(cz_k+d)(cz_j+d)}\quad (k,j=1,2,3,4)$$

и извършвайки несложни алгебрични преобразования, получаваме тъждеството.

Теоремата е доказана.

Следствие. Съществува дробно-линейно изображение, което изобразява конформно една равнина в друга, така че произволно зададени три различни точки от първата равнина да се трансформират в произволно зададени три различни точки от втората.

Доказателство: Нека вземем в равнината $\overline{Z}$ произволни три точки z_1, z_2 и z_3, в равнината $\overline{W}$ - три точки w_1, w_2 и w_3. Трябва да се намери дробно-линейна функция, която преобразува z_1 в w_1, z_2 в w_2 и z_3 в w_3. Ще предположим, че произволна точка z при това изображение минава в w. Според теорема 10 имаме

(16) $$\left(z_1, z_2; z_3, z\right) = \left(w_1, w_2; w_3, w\right).$$

Записвайки съгласно (15) разгърнатите изрази на двойните отношения в (16), т.е.

(17) $$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} : \frac{w_1 - w}{w_2 - w},$$

може лесно след това да се изрази w чрез z. Тъй като лявата част на равенство (17) е дробно-линейна функция на z, дясната - дробно-линейна функция на w, то и w ще се изрази чрез z във вид на дробно-линейна функция. По такъв начин задачата винаги има решение, при това единствено. Знаейки това, решението може да се намери и по метода на неопределените коефициенти, тъй като предварително е известно, че получената за тяхното определяне система от линейни уравнения е съвместима и има единствено решение. Именно, замествайки в равенството $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ съответстващите една на друга стойности z и w, получаваме три уравнения за определяне на четирите неизвестни коефициенти a, b, c, d:

$$w_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d},\ w_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d},\ w_3 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}.$$

От тази система три от неизвестните могат да се изразят чрез четвъртото, напр. b, c и d чрез $a \neq 0$:

$$b = ma,\ c = na,\ d = pa.$$

Замествайки ги в $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, намираме след съкращаването на a: $w = \dfrac{z+m}{nz+p}$.

Теоремата е доказана.

Ще отбележим, че формула (17) остава в сила също и в случая, когато една от точките z_k или w_k е безкрайно отдалечена, ако само в тази формула се заменят с единица всички разлики, които съдържат тази точка.

Пример 4. Да се намери функция, изобразяваща точките $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ съответно в точките $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1 - i$.

Решение: Заместваме дадените точки в двойното отношение (17):

$$\frac{i-\infty}{1-\infty} : \frac{i-z}{1-z} = \frac{0-(1-i)}{\infty-(1-i)} : \frac{0-w}{\infty-w}$$

или

$$\frac{i-\infty}{1-\infty}\,\frac{z-1}{z-i} = \frac{1-i}{w}\,\frac{\infty-w}{\infty-(1-i)}.$$

Оттук, замествайки с 1 разликите, които съдържат ∞, получаваме

$$\frac{1}{1}\,\frac{z-1}{z-i} = \frac{1-i}{w}\,\frac{1}{1} \quad \text{или} \quad w = (1-i)\frac{z-i}{z-1}.$$

Окончателно $w = \dfrac{(1-i)z-1-i}{z-1}$.

Можем да решим задачата и по метода на неопределените коефициенти. Ще търсим функция от вида $w = \dfrac{z+m}{nz+p}$. Заместваме в нея съответните стойности на z и w. Получаваме системата:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{i+m}{ni+p} \\ \infty = \dfrac{1+m}{n+p} \\ 1-i = \left.\dfrac{z+m}{nz+p}\right|_{z=\infty} = \dfrac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -i \\ n = -p \\ \dfrac{1}{n} = 1-i \end{cases}.$$

Оттук решението на системата е:

$$m = -i,\ n = \frac{1}{1-i},\ p = -\frac{1}{1-i}.$$

Замествайки в w, получаваме

$$w = \frac{z-i}{\dfrac{z}{1-i} - \dfrac{1}{1-i}} = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1} = \frac{(1-i)z-1-i}{z-1}.$$

Теорема 11. (*Кръгово свойство*) Окръжност в широк смисъл се преобразува с дробно-линейното изображение пак в окръжност в широк смисъл.

Доказателство: За доказателството използваме, че дробно-линейното изображение се разпада на преобразованията транслация, ротация, подобие и преобразованието $w = \dfrac{R^2}{z}$. При първите три преобразования очевидно окръжността ще се трансформира в окръжност, а правата (окръжност с безкраен радиус) - в права.

Остава да се докаже, че $w=\dfrac{R^2}{z}$ също преобразува окръжност в окръжност, но само в широк смисъл, както е казано в дефиниция 6. Като отделим в $w=\dfrac{R^2}{z}$ реалната и имагинерната част, полагайки $z=x+iy$, а $w=u+iv$, намираме

$$x+iy=\frac{R^2}{u+iv}=\frac{R^2(u-iv)}{u^2+v^2},$$

откъдето
$$\begin{cases} x=\dfrac{R^2u}{u^2+v^2} \\ y=-\dfrac{R^2v}{u^2+v^2} \end{cases}.$$

Заествайки тези равенства за x и y в уравнението на окръжността $A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0,\ A\neq 0$, получаваме

$$AR^4\frac{u^2+v^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}+\frac{BR^2u}{u^2+v^2}-\frac{CR^2v}{u^2+v^2}+D=0$$

или
$$D\left(u^2+v^2\right)+BR^2u-CR^2v+AR^4=0.$$

Това е уравнение на окръжност в широк смисъл в равнината W: при $D\neq 0$ - окръжност, при $D=0$ - права.

Теоремата е доказана.

Ще отбележим, че ако е зададена права или окръжност, лесно е да се разбере дали при дробно-линейното изображение тя се трансформира в права или в окръжност. Очевидно е, че в резултат на трансформацията ние ще получим права само в случай, че на дадената окръжност (или права) лежи точка, която чрез това изображение се привежда в безкрайност.

Например изображението $w=\dfrac{z+1}{2z+1}$ трансформира окръжността $4x^2+4y^2+2x-5y=1$ в окръжност, а окръжността $4x^2+4y^2+2x-5y=0$ в права. Наистина w е равно на безкрайност само при $z=-\dfrac{1}{2}$. Тази точка (т.е. $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=0$) лежи на втората окръжност, но не лежи на първата. Следователно на втората окръжност лежи точката, която с дробно-линейното изображение $w=\dfrac{z+1}{2z+1}$ се привежда в безкрайност, затова втората окръжност ще се трансформира в окръжност, минаваща през безкрайно отдалечената точка, т.е. в права. На първата окръжност няма точка, преминаваща в безкрайно отдалечената точка, затова нейният образ ще бъде окръжност.

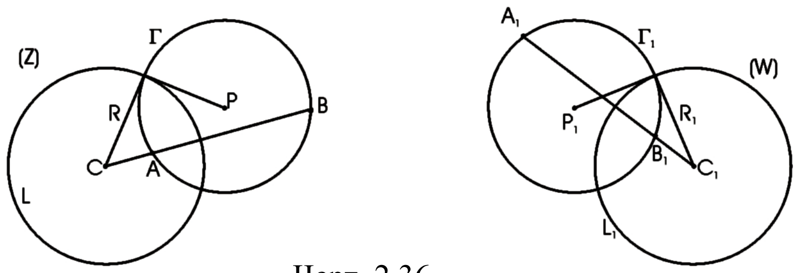
Теорема 12. Когато дробно-линейното изображение изобразява една окръжност в широк смисъл в друга, то това изображение превежда точките, симетрични (инверсни) относно първата, в точки, симетрични относно втората.

Доказателство: Нека при дробно-линейното изображение окръжността L (в широк смисъл) минава в окръжността L_1 (в широк смисъл), а точките A и B, инверсни относно L, преминават в точките A_1 и B_1 (черт. 2.36).

За да докажем, че A_1 и B_1 са симетрични (инверсни) относно L_1, прекарваме през тях произволна окръжност Γ_1. Обратното изображение ще трансформира Γ_1 в окръжността Γ (според кръговото свойство), минаваща през точките A и B. Тъй като тези точки са симетрични относно L, то Γ е ортогонална на L. Оттук, поради конформността на дробно–линейното изображение, Γ_1 е ортогонална на L_1. И така всяка окръжност Γ_1, минаваща през A_1

и B_1, е ортогонална на L_1; следователно A_1 и B_1 са симетрични (инверсни) относно L_1.

Теоремата е доказана.



Черт. 2.36

Теорема 13. Съществува единствено дробно–линейно изображение, преобразуващо дадена окръжност в разширената комплексна равнина $\overline{Z}$ в дадена окръжност в разширената комплексна равнина $\overline{W}$, така че при това три дадени точки от първата окръжност да се изобразяват съответно в три дадени точки от втората.

Теорема 14. Инверсията относно произволна окръжност е конформно изображение от втори род.

Няма да привеждаме доказателствата на тези теореми.

Задачи

I. В кои точки от равнината е нарушена конформността на изображението:

1) $w = z^4 + 4z$ **отг.** $-1; \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

2) $w = \cos 2z$ **отг.** $\dfrac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

3) $w = \sin\left(z - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **отг**. $\dfrac{3\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

II. Да се намери коефициентът на разтягане A и ъгълът на ротация α на даденото изображение $w = f(z)$ в дадената точка z_0, ако:

1) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0 = 2i$ **отг.** $A = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

2) $w = 3iz + 2$, $z_0 = 1 + i$ **отг.** $A = 3$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

3) $w = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 3i$ **отг.** $A = \dfrac{1}{9}$, $\alpha = 0$

III. Да се намери точка, която е симетрична на дадена точка z_0 относно окръжността L, ако:

1) $z_0 = z$, а $L \equiv |z| = 1$ **отг.** $w_0 = \dfrac{1}{\overline{z}}$

2) $z_0 = 4 - 3i$, а $L \equiv |z - 1| = 1$ **отг.** $w_0 = \dfrac{7 - i}{6}$

3) $z_0 = 1 + i$, а $L \equiv |z| = 1$ **отг.** $w_0 = \dfrac{1}{2}(1 + i)$

4) $z_0 = 1 + i$, а $L \equiv |z - i| = 2$ **отг.** $w_0 = 4 + i$

(***Упътване***: Точката $z_0 = 1 + i$ и центърът на окръжността i лежат на правата $y = 1$.)

IV. Да се изобрази конформно равнината $\overline{Z}$ в равнината $\overline{W}$, така че точките z_1, z_2, z_3 да преминат в точките w_1, w_2, w_3, ако:

1) $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1$, а $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1$ **отг.** $w = i\dfrac{z-i}{z+i}$

2) $z: -1, 1, \infty$, а $w: 0, 1, -1$ **отг.** $w = \dfrac{z+1}{3-z}$

3) $z: -1, i, 1+i$, а $w: 0, 2i, 1-i$ **отг.** $w = 2i\dfrac{z+1}{1+5i-4z}$

4) $z: -1, \infty, i$, а $w: \infty, i, 1$ **отг.** $w = \dfrac{iz+2+i}{z+1}$

5) $z: 1, 2, 3$, а $w: 2, 4, 6$ **отг.** $w = 2z$

6) $z_1 = 1$ и $z_2 = i$ са неподвижни, а $z_3 = 0$ преминава в $w_3 = -1$ (Неподвижната точка се изобразява сама в себе си.)

отг. $w = \dfrac{(2-i)z-1}{1-iz}$

7) $z_1 = \dfrac{1}{2}$ и $z_2 = 2$ са неподвижни, а $z_3 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}i$ преминава в $w_3 = \infty$. **отг.** $w = \dfrac{(1-4i)z - 2(1-i)}{2(1-i)z-(4-i)}$

8) $z: i, 1, 1+i$, а $w: 0, \infty, 1$ **отг.** $w = i\dfrac{z-i}{z-1}$

V. Да се намери образът на линията L при изображението $w = \dfrac{1}{z}$, ако:

1) $L \equiv x^2 + y^2 = \dfrac{y}{3}$ **отг .** $v = -3$

2) $L \equiv x^2 + y^2 = 2x$ **отг .** $u = \dfrac{1}{2}$

3) $L \equiv y = -\dfrac{x}{2}$ **отг .** $u - 2v = 0$

4) $L \equiv y = x - 1$ **отг** . $u^2 + v^2 - u - v = 0$

5) $L \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ **отг.** $u^2 + v^2 + 2u + 2v + 1 = 0$

VI. Да се намери линейно изображение, което:

1) има неподвижна точка $1 + 2i$ и преобразува i в $-i$

отг . $w = (2+i)z + 1 - 3i$

2) има неподвижна точка $-2i$ и преобразува 1 в $1+i$

отг. $w = \dfrac{7+i}{5}z + \dfrac{-2+4i}{5}$

3) трансформира кръга $|z - i| < 2$ в кръга $|w - 2| < 4$

отг. $w = 2e^{i\alpha}(z - i) + 2$ (α - реално число)

4) трансформира кръга $|z + i| < 1$ в кръга $|w - 1| < 3$

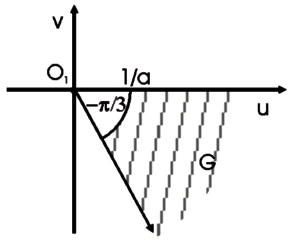
отг. $w = 3e^{i\alpha}(z + i) + 1$ (α - реално число)

(***Упътване*** за 3) и 4)**:** Представете линейното изображение във вида $w - w_0 = a(z - z_0)$.)

5) трансформира триъгълник с върхове в точките $0, 1, i$ в подобен триъгълник с върхове $0, 2, 1+i$ **отг.** $w = (1+i)(1-z)$

VII. Да се покаже в каква област G от равнината $\overline{W}$ се трансформира областта D от равнината $\overline{Z}$ чрез съответната функция $w = f(z)$, ако:

1) $D \equiv \begin{cases} 0 < r < a \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}, \quad w = \dfrac{1}{z}$ **отг.**



Черт. 2.37

2) $D \equiv \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \quad w = e^z$

отг. $G \equiv \begin{cases} u^2 + v^2 \ge 1 \\ u^2 + v^2 \le e \end{cases}$ в първи квадрант

3) $D \equiv \begin{cases} |z| < 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}, \quad w = i\dfrac{1-z}{1+z}$ **отг.** $G \equiv 0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$

4) $D \equiv \left| z - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{2}, \quad w = z^2$

отг. G е вътрешността на кардиоидата $\rho = \dfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)$

5) $D \equiv \operatorname{Re} z > 0, \quad w = \dfrac{2+z}{2-z}$ **отг**. $G \equiv |w| > 1$

6) $D \equiv \begin{cases} \operatorname{Re} z > 0 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}, \quad w = \dfrac{z-i}{z+i}$ **отг.** $G \equiv \begin{cases} |w| < 1 \\ \operatorname{Im} w < 0 \end{cases}$

7) $D \equiv \begin{cases} |z| < 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}, \quad w = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$ **отг.** $G \equiv \begin{cases} |w| < 1 \\ \left| w + \dfrac{5}{4} i \right| > \dfrac{3}{4} \end{cases}$

8) $D \equiv 0 < \operatorname{Re} z < 1$: **а)** $w = \dfrac{z-1}{z}$; **отг. а)** $G \equiv \begin{cases} \operatorname{Re} w < 1 \\ \left| w - \dfrac{1}{2} \right| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

б) $w = \dfrac{z-1}{z-2}$ **отг. б)** $G \equiv \begin{cases} \left| w - \dfrac{3}{4} \right| > \dfrac{1}{4} \\ \left| w - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

9) $D \equiv 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, \quad w = \dfrac{z}{z-1}$ **отг.** $G \equiv \begin{cases} \operatorname{Im} w < 0 \\ \left| w - \dfrac{1-i}{2} \right| > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

10) $D \equiv 1 < |z| < 2, \quad w = \dfrac{z}{z-1}$ **отг.** $G \equiv \begin{cases} \operatorname{Re} w > \dfrac{1}{2} \\ \left| w - \dfrac{4}{3} \right| > \dfrac{2}{3} \end{cases}$

11) $D \equiv \begin{cases} 1 \le |z| \le 2 \\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}, \quad w = 1 + \dfrac{1}{z}$

отг. $G \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le |w-1| \le 1 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg(w-1) \le 0 \end{cases}$

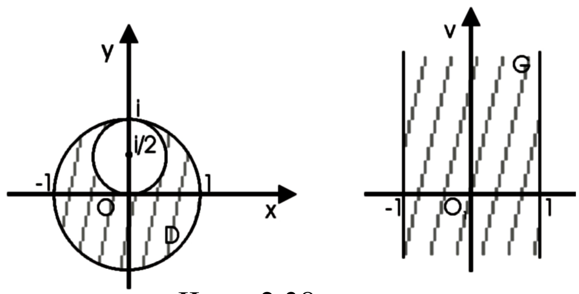
(***Упътване***: $|z|=1 \Rightarrow |w-1|=1$; $|z|=2 \Rightarrow |w-1|=\dfrac{1}{2}$; $1 \le x \le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2} \le u \le 2$; $y = x \Rightarrow u + v = 1$.)

VIII. Да се намери конформно изображение, извършващо посочените трансформации:

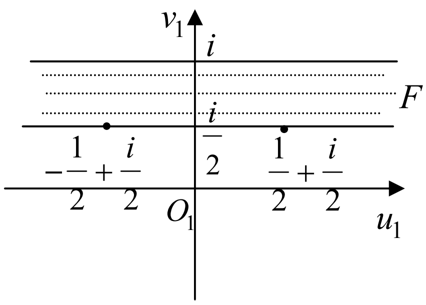
1) Областта $D \equiv \begin{cases} |z| \le 1 \\ \left|z - \dfrac{i}{2}\right| \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$ върху ивицата $G \equiv -1 \le \operatorname{Re} w \le 1$.

Решение: Трябва границата на областта D да изобразим в границата на ивицата G, т.е. окръжностите да изобразим в прави (черт. 2.38). Двете окръжности минават през точката $z = i$. Привеждаме тази точка в ∞, напр. с изображението $w_1 = \dfrac{1}{z-i}$. Тогава окръжностите ще се трансформират в прави.



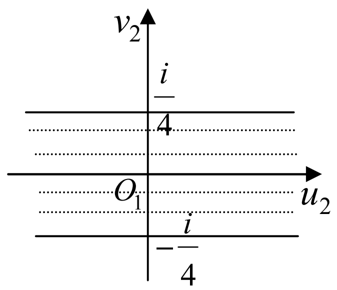
Черт. 2.38

Тъй като окръжностите се допират, т.е. имат само една обща точка $z = i$, то правите имат също само една обща точка $w_1 = \infty$, т.е. те са успоредни. За да намерим образа на окръжността $|z|=1$, вземаме върху нея две точки $z_1=-1$ и $z_2=1$; те ще се трансформират в точките $w_1'=\dfrac{1}{-1-i}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ и $w_1''=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$. Следователно окръжността $|z|=1$ ще се трансформира в права, минаваща през точките $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$ и $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$. Образът на окръжността $\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ сега може да се намери по образа на една нейна точка, например $z=0$. Намираме $w_1'''=\dfrac{1}{0-i}=i$. Следователно окръжността $\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ ще премине в права, минаваща през точка i, успоредна на първата права (черт. 2.39). Възниква въпросът дали областта D ще се изобрази в ивицата F, лежаща между правите, или в нейната външност? Затова вземаме в равнината $\overline{Z}$ някаква произволна точ - ка, напр. $z=\infty$; тя ще премине в точката $w_1^{IV}=0$. Точката $z=\infty$ лежи вън от областта D, значи нейният образ $w_1^{IV}=0$ трябва да лежи извън образа на областта D. И така областта D се изобразява в ивицата F между правите. Сега тази ивица трябва да транслираме с $\dfrac{3}{4}$ единици надолу, т.е. да положим $w_2=w_1-\dfrac{3}{4}i$ (черт. 2.40). След

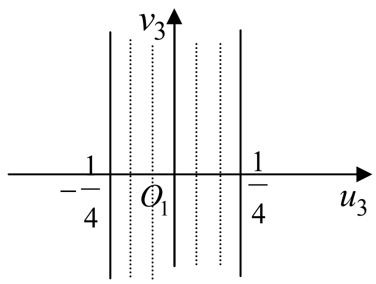


Черт. 2.39

това завъртаме новополучената ивица на 90^0, т.е. полагаме $w_3 = e^{\frac{\pi}{2}i} w_2 = i\,w_2$ (черт. 2.41).



Черт. 2.40



Черт. 2.41

Накрая трябва да разширим ивицата 4 пъти, т.е. трябва да вземем $w = 4w_3$. Тогава вече получаваме търсената ивица от черт. 2.38.

Окончателният вид на функцията w, извършила всички тези преобразования е :

$$w = 4w_3 = 4iw_2 = 4i\left(w_1 - \frac{3}{4}i\right) = 3 + 4iw_1 = 3 + 4i\frac{1}{z-i} = \frac{3z+i}{z-i},$$

което и беше целта на нашата задача.

2) Да се изобрази конформно горната полуравнина $(\operatorname{Im} z > 0)$ в себе си $(\operatorname{Im} w > 0)$.

(***Упътване***: Вземете три произволни точки z_1, z_2, z_3 на оста Ox и ги трансформирайте в точките w_1, w_2, w_3 на оста O_1u. Докажете, че във функцията $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ всички коефициенти са реални. Вземете напр. точката $z = i$ и проверете, че тя се трансформира в точка, лежаща също в горната полуравнина само тогава, когато $ad-bc>0$. От всичко казано правим извода, че изображението $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ трансформира горната полуравнина в горната полуравнина тогава и само тогава, когато a, b, c и d са реални числа и $ad-bc>0$.

Задачата няма единствено решение. Вземете конкретни точки z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 и намерете някое от тях.)

3) Изобразете единичния кръг $|z|<1$ в единичния кръг $|w|<1$, така че точката α от кръга $|z|<1$ да премине в центъра на кръга $|w|<1$. **отг.** $w=e^{i\varphi}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ (φ - произволно реално число)

(***Упътване***: Тъй като точката $z=\alpha$ минава в $w=0$, то инверсната (симетричната) ѝ точка $z=\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ относно окръжността $|z|=1$ според принципа на симетрия ще мине в точката $w=\infty$. Следователно търсеното дробно-линейно изображение ще има вида $w=k_1\dfrac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}}$

или $w=k\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, където $k=-\bar{\alpha}k_1$. За да определите k_1, използвайте, че $|w|=1$ и $|z|=1$.)

4) Изобразете горната полуравнина $(\operatorname{Im} z>0)$ в единичния кръг$(|w|<1)$, така че точката α от полуравнината да мине в центъра на кръга.

отг. $w=e^{i\varphi}\dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$ (φ - произволно реално число)

(***Упътване***: Тук точка $\bar{\alpha}$ е симетрична на α относно реалната ос Ox. Тя се трансформира в ∞. Отчетете, че z е реално върху Ox.)

5) Горния полукръг $D \equiv \begin{cases} |z|<1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$ изобразете конформно върху първи квадрант: $\operatorname{Re} w > 0,\ \operatorname{Im} w > 0$.

отг. $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ (едно възможно решение)

(***Упътване***: Тук точките $z:1,-1,0 \Rightarrow w:\infty,0,1$. Можете да използвате други точки. Ще се получи и друг отговор.)

6) Да се намери конформно изображение на кръга $|z|<5$ в кръга $|w|<1$, така че точките $z_1=-5,\ z_2=4+3i,\ z_3=5$ да минат в точките $w=1,\ i,\ -1$. **отг**. $w = \dfrac{2z-5}{10-z}$

(***Упътване***: Точките w_1, w_2, w_3 трябва да установяват същата посока на описване на границата на $|w|<1$, както и точките z_1, z_2, z_3.)

7) Да се намери дробно-линейна функция, изобразяваща сегмента $D \equiv \begin{cases} |z-1|<1 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ върху ъгловата област $G \equiv 0 < \arg w < \dfrac{\pi}{4}$, така че началото на координатната система да остава неподвижно (т.е. да се изобразява само в себе си). **отг.** $w = \dfrac{z}{1+i-z}$

(***Упътване***: Общата точка $A\left(z=1+i\right)$ на дъгата и хордата да мине в безкрайност. Тогава $w = k\dfrac{z}{1+i-z}$. Коефициентът k да се определи от това, че точка от хордата (напр. $z = \dfrac{1+i}{2}$) трябва да мине в точка от оста O_1u (напр. $w = 1$).)

8) Да се намери дробно-линейна функция, изобразяваща горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$ върху кръга $|w| < 2$, така че точката $z = i$ да мине в центъра $w = 0$ на този кръг, а производната на функцията да е $w' = f'(i) = 2$. **отг.** $w = 4i\dfrac{z-i}{z+i}$

(***Упътване*:** Използвайте зад. 4, VIII, и факта, че кръгът $|w| < 2$ има радиус 2, не 1).

9) Намерете дробно-линейна функция, изобразяваща:

а) областта $D \equiv \begin{cases} |z+1| > 1 \\ |z+2| < 2 \end{cases}$ върху ивицата $G \equiv 0 < \operatorname{Im} w < 1$;

отг. $w = 2i\dfrac{z+2}{z}$

б) областта $D \equiv |z - 1 + i| < 1$ върху $G \equiv |w - 1| > 3$

отг. $w = 1 + \dfrac{3}{z - 1 + i}$

10) Да се изобрази кръгът $|z| < 1$ върху кръга $|w| < 1$, така че:

а) $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$; **отг.** $w = \dfrac{2z-1}{2-z}$

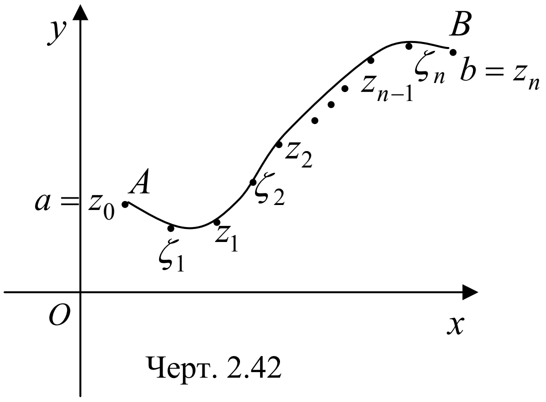
б) $w\left(\dfrac{i}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; **отг.** $w = \dfrac{2iz+1}{2+iz}$

в) $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\dfrac{\pi}{2}$ **отг.** $w = -iz$

§9. Интеграл от функция на комплексна променлива. Теореми на Коши

Дефиниция 1. Нека в комплексната равнина Z е дадена ориентираната крива $L \equiv \overset{\frown}{AB}$, $A(z=a)$ и $B(z=b)$, във всички точки на която е дефинирана функцията $f(z)$. Разделяме кривата L на дъгички с помощта на точките $a \equiv z_0, z_1, ..., z_n \equiv b$.

Върху всяка от тези дъгички произволно вземаме точките ζ_k,



Черт. 2.42

$\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$, $k = 1, 2, ..., n,$ (черт. 2.42) и образуваме интегралната сума

(1) $S = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$,

където

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

2.42

Ако тази сума има граница, независеща нито от избора на точките $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$, нито от избора на точките $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ върху кривата L, при единственото условие, че всички разлики Δz_k, $k = 1, 2, ..., n$, клонят към нула, когато $n \to \infty$, то границата на интегралната сума (1) се нарича *интеграл от функцията* $f(z)$ *по кривата* L. Записва се

(2) $$\int_L f(z)dz = \lim_{\delta \to 0} S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

където $\delta = \max|\Delta z_k|$ и всички $\Delta z_k \to 0,\ k = 1, 2, ..., n$, щом $\delta \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. (*За съществуване на интеграла*) Ако кривата L е по части гладка, а функцията $f(z)$ е непрекъсната върху нея, то съществува интегралът от функцията $f(z)$ по кривата L.

Доказателство: В интегралната сума (1) отделяме реалната и имагинерната части. За тази цел полагаме

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y);\ z_k = x_k + iy_k;\ \zeta_k = \xi_k + i\eta_k,$$

$k = 1, 2, ..., n$. Тогава интегралната сума S приема вида:

(3) $$S = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right].$$

(Тук $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, а $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.)

В математическия анализ се доказва, че сумата $\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k$ в случая, когато кривата L е по части гладка, а функцията $u(x,y)$ е непрекъсната върху нея, има граница, независеща от избора на точките $z_k = (x_k, y_k)$ и $\zeta_k = (\xi_k, \eta_k)$, стига само всички разлики $\Delta x_k \to 0$ при $n \to \infty$, и тази граница се нарича криволинеен интеграл от втори род.

Тъй като функцията $f(z)$ е непрекъсната върху L, то нейните Re и Im части са също непрекъснати върху L, а от $\Delta z_k \to 0$, следва, че както Δx_k, така и Δy_k клонят към нула.

Затова

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k = \int_L u(x,y)\,dx .$$

Аналогично заключаваме, че съществуват границите на другите суми, стоящи в дясната страна на равенство (3).

Окончателно, съгласно (3), получаваме

(4)
$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + {}$$
$$+ i\int_L v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy ,$$

което искахме да докажем.

Ще отбележим, че дясната страна на (4) можем да получим формално, ако в лявата страна $f(z)$ заместим с $u(x,y)+i\,v(x,y)$, а вместо $dz = d(x+iy)$ поставим $dx + idy$, след което отделим Re и Im части.

Пресмятане на интеграла. От полученото по-горе равенство (4) става ясно, че пресмятането на интеграла (2) от функция на комплексна променлива по кривата L може да се сведе до пресмятането на двата криволинейни интеграли от втори род, които стоят в дясната страна на това равенство. За тази цел задаваме кривата L параметрично:

(5)
$$L \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2 ,$$

като $a = x(t_1) + i\,y(t_1)$, а $b = x(t_2) + iy(t_2)$. (Изменението на параметъра t е съобразено с посоката на описване на кривата L.)

Замествайки равенство (5) в дясната страна на (4), получаваме:

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} \left\{u\left[x(t),y(t)\right]x'(t) - v\left[x(t),y(t)\right]y'(t)\right\}dt +$$

$$+i\int_{t_1}^{t_2} \left\{v[x(t),y(t)]x'(t) + u\left[x(t),y(t)\right]y'(t)\right\}dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{u\left[x(t),y(t)\right] + iv\left[x(t),y(t)\right]\right\}.\left[x'(t)+iy'(t)\right]dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t)+iy(t)\right]d\left[x(t)+iy(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} f\left[z(t)\right]dz(t).$$

На практика постъпваме по следния начин:

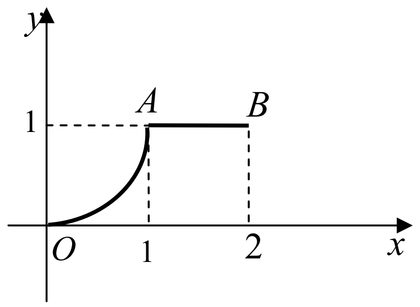
а) От параметричното задаване (5) на кривата L минаваме към така нареченото комплексно-параметрично задаване на $L \equiv z = x(t)+iy(t) = z(t)$. Оттук е ясно, че $dz = z'(t)dt$;

б) Заместваме в $\int_L f(z)dz$ променливата z със $z(t)$, а dz със $z'(t)dt$. Получаваме

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f\left[z(t)\right]z'(t)dt,$$

като последният интеграл се пресмята като обикновен определен интеграл, в който променливата на интегриране t е реална, а оттук и границите t_1 и t_2 на определения интеграл са също реални числа.

Пример 1. Пресметнете $\int_L z^2 dz$, където $L \equiv OAB$ се състои от дъгата $\overset{\frown}{OA}$ на параболата $y = x^2$: $O(z=0)$, $A(z=1+i)$ и



Черт. 2.43

отсечката $\overline{AB}$: $B\left(z=2+i\right)$ (черт. 2.43).

Решение: Записваме дадения интеграл във вида:

$$\int\limits_L z^2\,dz=\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} z^2\,dz+\int\limits_{\overline{AB}} z^2\,dz=$$
$$=I_1+I_2\,.$$

(Използваното свойство ще бъде цитирано по-нататък.)

Пресмятаме първо интеграла I_1. Задаваме дъгата $\overset{\frown}{OA}$ параметрично $\overset{\frown}{OA}\equiv\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}\quad\left(0\le t\le 1\right)$, откъдето комплексно-параметричното ѝ уравнение е:

$$\overset{\frown}{OA}\equiv z=t+i\,t^2,\ \text{а}\ dz=\left(1+2i\,t\right)dt\,.$$

Тогава

$$I_1=\int_0^1\left(t+it^2\right)^2\left(1+2it\right)dt=\int_0^1\left(t^2+4it^3-5t^4-2it^5\right)dt=$$
$$=\left.\left(\frac{t^3}{3}+it^4-t^5-\frac{i}{3}t^6\right)\right|_0^1=\frac{1}{3}+i-1-\frac{i}{3}=-\frac{2}{3}\left(1-i\right).$$

Сега пресмятаме интеграла I_2. Отсечката $\overline{AB}$ има следното параметрично уравнение: $\overline{AB}\equiv\begin{cases}x=t\\ y=1\end{cases}\quad\left(1\le t\le 2\right)$, откъдето $\overline{AB}\equiv z=t+i$, а $dz=dt$. За I_2 получаваме:

$$I_2 = \int_1^2 (t+i)^2\, dt = \left.\frac{(t+i)^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}\left[(2+i)^3 - (1+i)^3\right] = \frac{4}{3} + 3i.$$

Следователно

$$\int_L z^2 dz = \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{4}{3} + 3i\right) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

Пример 2. $\oint_L \frac{dz}{(z-c)^m}$, където L е окръжността $|z-c| = R,\ c = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $R > 0$, описана един път в положителна посока (обратно на часовниковата стрелка), а m е цяло число $(m \in \mathbb{Z})$.

Решение: Каноничното уравнение на окръжността L е: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. Оттук, полагайки $x - \alpha = R\cos t$, а $y - \beta = R\sin t$, получаваме параметричното задаване на L. Именно: $L \equiv \begin{cases} x = \alpha + R\cos t \\ y = \beta + R\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Тогава нейното комплексно-параметрично уравнение е:

$$L \equiv z = (\alpha + R\cos t) + i(\beta + R\sin t) =$$

$$= (\alpha + i\beta) + R(\cos t + i\sin t) = c + \mathrm{Re}^{it}.$$

От тук $dz = Rie^{it}dt$. Заместваме в дадения интеграл:

$$\oint_L \frac{dz}{(z-c)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{(c + \mathrm{Re}^{it} - c)^m} dt = iR^{1-m} \int_0^{2\pi} e^{(1-m)it} dt =$$

$$= \frac{i R^{1-m}}{i(1-m)} e^{(1-m)it} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{1-m}}{1-m} \left[e^{(1-m)2\pi i} - 1 \right] \equiv 0$$

при $m \neq 1$, тъй като $e^{(1-m)2\pi i} = e^0 = 1$.

При $m = 1$ имаме $\oint\limits_L \frac{dz}{z-c} = i \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i$.

И така

$$\oint\limits_L \frac{dz}{(z-c)^m} = \begin{cases} 0, \, m \neq 1, m \in \mathbb{Z} \\ 2\pi i, \, m = 1 \end{cases}.$$

Теорема 2. Нека е даден функционният ред

(6) $$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

и нека L е ректифицируема крива. Ако този ред е равномерно сходящ и членовете на реда са непрекъснати върху L , то той може да се интегрира почленно по L, т.е.

(7) $$\int\limits_L S(z) dz = \int\limits_L f_0(z) dz + \int\limits_L f_1(z) dz + \ldots + \int\limits_L f_n(z) dz + \ldots,$$

където $S(z)$ е сумата на реда (6).

Доказателство: От непрекъснатостта на членовете на реда (6) и неговата равномерна сходимост върху L следва (теорема 5, § 5), че и сумата $S(z)$ на реда (6) е непрекъсната върху L и следователно интегруема по L. Да означим дължината на кривата L с l. Ако ε е произволно положително число и $N(\varepsilon)$ е такъв номер, че при $n > N$ във всички точки от кривата L да е изпълнено неравенството

$$\left|S(z)-S_n(z)\right|<\frac{\varepsilon}{l}$$

($S_n(z)$ е n - та парциална сума на реда (6)), то очевидно

$$\left|\int_L S(z)dz-\sum_{k=0}^{n}\int_L f_k(z)dz\right|=\left|\int_L\left[S(z)-S_n(z)\right]dz\right|<\frac{\varepsilon}{l}l=\varepsilon$$

(при $n>N(\varepsilon)$), откъдето следва равенство (7).

Теоремата е доказана.

Ако в теорема 2 приемем, че членовете на реда (6) са аналитични функции в областта D и кривата L изцяло лежи в D, то и сумата $S(z)$ на този ред ще бъде аналитична в D (теорема 7 (Вайерщрас), § 7). (Ясно е, че всяка аналитична функция е и непрекъсната.) Тогава интегралите в равенство (7) няма да зависят от кривата L, а само от нейните начална и крайна точки (следствие 1, § 9) и равенство (7) ще се запише така:

$$\int_{z_1}^{z_2} S(z)dz=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{z_1}^{z_2} f_k(z)dz,$$

където z_1 и z_2 са съответно началната и крайна точки на кривата L.

В частност всичко казано до тук важи за всеки степенен ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, тъй като неговите членове не само са непрекъснати, но и аналитични за $\forall z$, а самият ред е равномерно сходящ във всеки затворен кръг $\left|z-z_0\right|\le R_0<R$, където $R>0$ е радиусът на сходимост на този ред.

Свойства на интеграла (2) от функция на комплексна променлива:

1^0) $\oint\limits_{L^+} f(z)dz = -\oint\limits_{L^-} f(z)dz$, където с L^+ е означено интегрирането в посока, обратна на въртенето на часовниковата стрелка (положителна посока), а с L^- - по часовниковата (отрицателна посока).

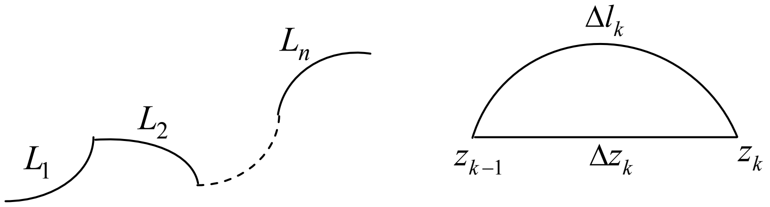
Или, ако кривата L не е затворена, а L е дъгата $\overset{\frown}{AB}$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz .$$

2^0) $\int\limits_L \left[\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(z)\right] dz = \sum_{k=1}^{n} C_k \int\limits_L f_k(z)dz$

(свойство *линейност*), където C_k са комплексни константи $(k = 1, 2, ..., n)$.

3^0) Ако кривата на интегриране L се състои от кривите $L_1, L_2, ..., L_n$ (черт. 2.44 а)), то $\int\limits_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{L_k} f(z)dz$.



а) Черт. 2.44 б)

Тези свойства $\left(1^0 - 3^0\right)$ следват непосредствено от равенство (4), тъй като са в сила за двата криволинейни интеграли от втори род, които стоят в дясната страна на това равенство (или непосредствено от дефиниция 1).

4^0) Ако $M = \max\limits_{z \in L} |f(z)|$ и l е дължината на кривата L, то

(8) $$\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le \int\limits_L |f(z)|.|dz| \le M\,l.$$

Неравенство (8) се нарича *неравенство на Дарбу*[39].

Наистина за интегралната сума (1) имаме:

(9) $$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|.|\Delta z_k| \le M\sum_{k=1}^{n} \Delta l_k,$$

където Δl_k е дължината на дъгата $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$, а Δz_k е дължината на хордата на тази дъга (черт. 2.44 б)). Минавайки към граничен преход в неравенство (9) при $\delta \to 0\ (n \to \infty)$, получаваме (8).

Трябва да отбележим, че теоремата за средните стойности в интегралното смятане, а именно: "Ако реалната функция $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, то съществува точка $\xi \in (a,b)$ такава, че $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$", не е в сила за интегралите от функция на комплексна променлива.

От тази теорема за реалните функции в частност следва, че ако непрекъснатата функция не се анулира в нито една точка от интервала (a,b), то интегралът $\int\limits_a^b f(x)dx$ също не може да е равен на нула. Но това твърдение не важи за интегралите от функция на комплексна променлива даже в този случай, когато интегрирането се ограничава по отсечка от реалната ос.

---

[39] J. G. Darboux (13.08.1842-23.02.1917) - френски математик.

Пример 3. Да разгледаме $\int\limits_L e^{2\pi ix}dx$, където L е отсечката $0 \le x \le 1$. Тогава, използвайки формулата на Ойлер, получаваме:

$$\int\limits_L e^{2\pi ix}dx = \int\limits_0^1 \cos 2\pi x\,dx + i\int\limits_0^1 \sin 2\pi x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\Big|_0^1 - i\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\Big|_0^1 = 0\,.$$

Обаче $e^{2\pi ix}$ не се анулира в нито една точка от интервала $[0,1]$.

По такъв начин, посоченият по-горе частен случай от теоремата за средните стойности е неприложим към интегралите от комплексни функции. Следователно и самата теорема за средните стойности не е в сила за тях.

Ще се спрем и на *граничния преход под знака на интеграла*: Нека $\overset{\frown}{AB}$ е по части гладката крива (дъга) с дължина l и

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

е редица от непрекъснати функции на комплексната променлива z върху $\overset{\frown}{AB}$, която е равномерно сходяща към функцията $f(z)$ върху тази дъга (дефиниция 4, § 5). Функцията $f(z)$ е непрекъсната върху $\overset{\frown}{AB}$ (теорема 2, § 5). Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f_n(z)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz\,.$$

Наистина, задавайки $\varepsilon > 0$, намираме номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че при $n > N$ е в сила неравенството

$$\left|f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon \text{ за } \forall z \in \overset{\frown}{AB}\,.$$

Тогава от свойство $4^0)$ получаваме

$$\left| \int_{\overset{\frown}{AB}} f_n(z)dz - \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz \right| = \left| \int_{\overset{\frown}{AB}} \left[f_n(z) - f(z) \right] dz \right| < \varepsilon l ,$$

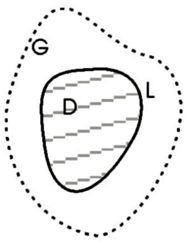
което и доказва, че

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\overset{\frown}{AB}} f_n(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz .$$

Теорема 3. (*Основна теорема на Коши за едносвързана област*). Ако еднозначната функция $f(z)$ е аналитична в едносвързаната област G, то $\int_L f(z)dz = 0$ за всяка затворена Жорданова ректифицируема крива L, която изцяло лежи в G (черт. 2.45).

Доказателство: За доказателството на теоремата ще използваме формулата на Грийн[40] – Гаус:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(Q_x - P_y \right) dxdy ,$$



Черт. 2.45

където D е областта, ограничена от кривата L $(D \subset G)$ (черт. 2.45). Ще приложим тази формула към двата интеграла, стоящи в дясната страна на равенство (4):

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + $$
$$+ i\oint_L v(x,y)dx + u(x,y)dy .$$

Получаваме:

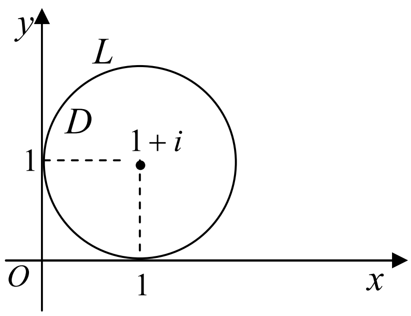
[40] I.Green (14.07.1793-31.03.1841) - английски математик и физик.

$$\oint_L f(z)\,dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy .$$

Тъй като по условие функцията $f(z)$ е аналитична в G, то за нея се изпълняват условията на Коши - Риман: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Оттук лесно се вижда, че подинтегралните изрази в двойните интеграли са равни на нула, а следователно и $\oint_L f(z)\,dz = 0$, като посоката на интегриране е без значение.

Пример 4. Пресметнете $\oint_L \frac{e^z + 1}{z^2} dz$, $L \equiv |z - 1 - i| = 1$.

Решение: Подинтегралната функция $f(z) = \frac{e^z + 1}{z^2}$ е аналитична за $\forall z \neq 0$, тъй като са аналитични функциите 1, e^z и z^2 за $\forall z$. (Проверете сами условията на Коши - Риман.) Оттук сумата и частното на аналитични функции е също аналитична функция с изключение на точките, за които се анулира знаменателят. Но в случая точката $z = 0$ не лежи нито на окръжността L, нито в кръга D, заграден от L (черт. 2.46). Следователно се изпълняват условията в теорема 3 на Коши за едносвързана област и $\oint_L \frac{e^z + 1}{z^2} dz = 0$.



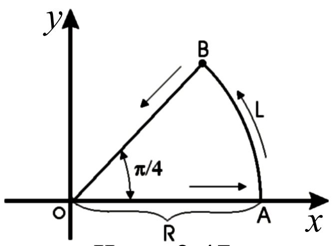
Черт. 2.46

(Интегралът може да бъде пресметнат и като се използва комплексно-параметричното задаване на кривата L. Това оставяме да направи читателят.)

Ще отбележим, че в първите работи на Коши неговата теорема е служила като средство за пресмятане на различни определени интеграли от функция на реална променлива (основно несобствени интеграли). За да се добие представа за приложението на основната теорема на Коши, довело до появата на самата теорема, ще дадем два примера:

Пример 5. Да се пресметнат интегралите на Френел $\int\limits_0^\infty \cos x^2 dx$ и $\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx$. (A.J.Fresnel (10.05.1788-14.07.1827) – френски инженер, физик и математик.)

Решение: За изчисляване на тези интеграли, които се срещат в теорията на дифракциите, ще разгледаме спомагателната функция $f(z) = e^{iz^2}$. Тази функция може да се разглежда като съставна функция $f(z) = F\left[\varphi(z)\right]$, където $\varphi(z) = iz^2$, а $F(\zeta) = e^{\zeta}$. Оттук по правилото за диференциране на съставна функция (ще отбележим, че $\varphi(z)$ и $F(\zeta)$ са аналитични функции. Проверете!) следва, че $f(z)$ е диференцируема в цялата комплексна равнина, при което $f'(z) = 2ize^{iz^2}$. Следователно за нея е приложима основната теорема на Коши.



Черт. 2.47

Вземаме линията L (черт. 2.47) за контур на интегриране. Тя се състои от отсечката $\overline{OA}$ на положителната полуос с дължина R (R - произволно положително число), дъгата $\overset{\frown}{AB}$ от окръжност с радиус R и с център в началото O на координатната система и отсечката $\overline{BO}$ от ъглополовящата на първия координатен ъгъл (в първи квадрант). Ъгълът AOB е равен следователно на $\frac{\pi}{4}$. Според интегралната (основната) теорема на Коши интегралът $\oint\limits_L e^{iz^2}dz = 0$. Но

$$\oint\limits_L e^{iz^2}dz = \oint\limits_{\overline{OA}} e^{iz^2}dz + \oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} e^{iz^2}dz + \oint\limits_{\overline{BO}} e^{iz^2}dz = 0.$$

Разглеждаме поотделно горните три интеграла :

а) $\overline{OA} \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = t$ и $dz = dt$, а $0 \le t \le R$.

Тогава $I_1 = \int\limits_{\overline{OA}} e^{iz^2}dz = \int\limits_0^R e^{it^2}dt$.

б) $\overset{\frown}{AB} \equiv x^2 + y^2 = R^2$ или

$\overset{\frown}{AB} \equiv \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow z = R(\cos t + i\sin t) = \mathrm{Re}^{it}$, $dz = Rie^{it}dt$, а

$0 \le t \le \frac{\pi}{4}$. Имаме $I_2 = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} e^{iz^2}dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2it}}Rie^{it}dt$.

в) $\overline{BO} \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow z = t(1+i), dz = (1+i)dt$, а t се мени от

$\frac{R}{\sqrt{2}}$ до 0. Получаваме

$$I_3 = \int\limits_{BO} e^{iz^2} dz = \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{0} e^{i.2it^2}\left(1+i\right)dt = -\left(1+i\right)\int\limits_{0}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-2t^2} dt .$$

Полагаме $t\sqrt{2} = \tau,\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}} d\tau$ и тогава

$$I_3 = \int\limits_{BO} e^{iz^2} dz = -\left(1+i\right)\int\limits_{0}^{R} e^{-\tau^2} \frac{1}{\sqrt{2}} d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\int\limits_{0}^{R} e^{-\tau^2} d\tau .$$

Нека сега $R \to \infty$. Използвайки интеграла на Поасон (S. D. Poisson (21.06.1781 – 25.04.1840) – френски механик, физик и математик.) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, за I_3 получаваме:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

т.е. $I_3 \to -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ при $R \to \infty$.

Ще покажем, че $I_2 \to 0$ при $R \to \infty$. Затова оценяваме модула $\left|I_2\right|$. Получаваме $\left|I_2\right| \le R\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{iR^2 e^{2it}}\right| dt$. Тук

$$\left|e^{iR^2 e^{2it}}\right| = \left|e^{iR^2\left(\cos 2t + i\sin 2t\right)}\right| = \left|e^{iR^2\cos 2t}\right| . \left|e^{-R^2\sin 2t}\right| = 1.e^{-R^2\sin 2t} .$$

Следователно $\left|I_2\right| \le R\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2t} dt$. Но $\sin 2t \ge \frac{2}{\pi}2t = \frac{4t}{\pi}$ при

$0 \le 2t \le \frac{\pi}{2}$ [41]. Тогава

$$\left|I_2\right| \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-4\frac{R^2}{\pi}t}dt = -\frac{\pi}{4R}e^{-\frac{4R^2}{\pi}t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\frac{1-e^{-R^2}}{R},$$

откъдето се получава, че $\lim\limits_{R\to\infty} I_2 = 0$.

Накрая записваме I_1 във вида:

$$I_1 = \int_0^R e^{it^2}dt = \int_0^R \cos t^2 dt + i\int_0^R \sin t^2 dt.$$

Тъй като $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ за $\forall R$, то $I_1 = -I_2 - I_3$. Тогава

$$\lim_{R\to\infty} I_1 = -\lim_{R\to\infty} I_2 - \lim_{R\to\infty} I_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i),$$

откъдето

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R \cos t^2 dt + i\int_0^R \sin t^2 dt\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i).$$

---

[41] Наистина функцията $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ е намаляваща в интервала $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, тъй като $f'(x) = \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x\left(x - \text{tg}x\right)}{x^2} < 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Следователно $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ако $x < \frac{\pi}{2}$, т.е $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ или $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. При $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ се получава равенство.

От полученото равенство следва първо, че съществуват интегралите

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos x^2 dx \text{ и } \int_0^\infty \sin x^2 dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin x^2 dx,$$

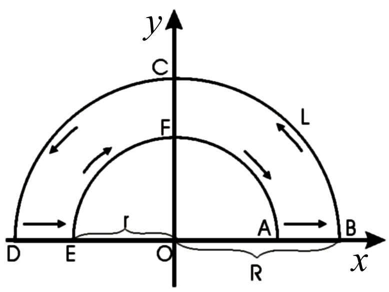
и второ, че

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

(Използвахме дефиницията за равенство на две комплексни числа.)

Пример 6. Интеграл на Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

Решение: Вземаме спомагателната функция $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$.



Черт. 2.48

Тази функция е дефинирана в цялата комплексна равнина с изключение на точката $z=0$ (началото на координатната система). За контур на интегриране вземаме кривата L, изобразена на черт. 2.48. Върху кривата L и вътре в едносвързаната област, заградена от L, функцията $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ е аналитична и за нея може да се приложи основната теорема на Коши:

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{AB}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\overparen{BCD}}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{DE}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\overparen{EFA}}\frac{e^{iz}}{z}dz =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

Ще разгледаме поотделно тези интеграли :

а) $\overline{AB} \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = t$, $dz = dt$ и $r \le t \le R$.Тогава

$$I_1 = \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt = \int_r^R \frac{\cos t}{t} dt + i \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt .$$

б) $\widehat{BCD} \equiv x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow z = \mathrm{R}e^{it}$,

$$dz = R i e^{it} dt, \; 0 \le t \le \pi .$$

Получаваме, че

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{e^{i\mathrm{R}e^{it}}}{\mathrm{R}e^{it}} R i e^{it} dt = i \int_0^\pi e^{i\mathrm{R}e^{it}} dt = i \int_0^\pi e^{R(i\cos t - \sin t)} dt .$$

в) $\overline{DE} \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = t, dz = dt$, а t се мени от $-R$ до $-r$.

Имаме

$$I_3 = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt = \int_{-R}^{-r} \frac{\cos t}{t} dt + i \int_{-R}^{-r} \frac{\sin t}{t} dt .$$

Заменяйки тук t с $-t$, получаваме:

$$I_3 = -\int_r^R \frac{\cos t}{t} dt + i \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt .$$

г) $\widehat{EFA} \equiv x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \Rightarrow z = re^{it}$, $dz = r i e^{it} dt$, а t се мени от π до 0. Тогава

$$I_4 = \int_\pi^0 \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} r i e^{it} dt = i \int_\pi^0 e^{ire^{it}} dt = -i \int_0^\pi e^{r(i\cos t - \sin t)} dt .$$

Нека сега $R \to \infty$. Тогава $I_2 \to 0$. Наистина

$$\left|I_2\right| \le \int_0^{\pi}\left|e^{R(i\cos t-\sin t)}\right|dt = \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R\sin t}dt .$$

Полагайки във втория интеграл в горната сума $t=\pi-\tau$, получаваме

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R\sin t}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-R\sin\tau}\left(-d\tau\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\tau}d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt .$$

Тогава

$$\left|I_2\right| \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt < 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}t}dt \overset{42}{=} 2\frac{-\pi}{2R}.e^{-R\frac{2}{\pi}t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \pi\frac{1-e^{-R}}{R} < \frac{\pi}{R},$$

откъдето $\lim\limits_{R\to\infty} I_2 = 0$.

Нека сега $r\to 0$. Ще намерим границата на I_4 при $r\to 0$. Тъй като функцията $\varphi(z)=e^{iz}$ е непрекъсната в точката $z=0$ и $\varphi(0)=1$, то за $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0$, такова че при $|z|<\delta$ се изпълнява неравенството

$$\left|\varphi(z)-\varphi(0)\right| = \left|\varphi(z)-1\right| = \left|e^{iz}-1\right| < \varepsilon .$$

Оттук следва, че

---

[42] Използвано е неравенството $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$, обяснено в пример 5 [41)].

$$\left| I_4 - \left(-i\int_0^{\pi} 1.dt \right) \right| = \left| -i\int_0^{\pi} \left[e^{r\left(i\cos t - \sin t\right)} - 1 \right] dt \right| \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \left| e^{r\left(i\cos t - \sin t\right)} - 1 \right| dt = \int_0^{\pi} \left| e^{ir(\cos t + i\sin t)} - 1 \right| dt < \pi\varepsilon ,$$

т.е. $\lim\limits_{r\to 0} I_4 = -i\int_0^{\pi} 1.dt = -\pi i$.

Връщайки се към основното съотношение, а именно, че

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{z} dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 ,$$

имаме: $I_1 + I_3 = -I_2 - I_4$ или, замествайки I_1 и I_3 с получените по-горе изрази, получаваме:

$$2i\int_r^R \frac{\sin t}{t} dt = -I_2 - I_4 .$$

При $R \to \infty$ и $r \to 0$ получихме, че

$$-\lim_{R\to\infty} I_2 - \lim_{r\to 0} I_4 = \pi i .$$

Следователно и $I_1 + I_3 \underset{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}}{\longrightarrow} \pi i$, т.е. $2i \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt = \pi i$.

Означавайки $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt$, съществуването на която доказахме, с $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, получаваме окончателно:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} .$$

Забележка 1. В математическия анализ при извеждането на формулата на Грийн - Гаус се предполага непрекъснатост на частните производни $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ вътре в областта D и по контура L (или в G). Значи в нашия случай ние бихме могли да използваме формулата на Грийн - Гаус само тогава, когато са непрекъснати частните производни $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Известно е, че $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ (теорема 1, § 7). Затова частните производни са непрекъснати само в случая, когато е непрекъсната производната $f'(z)$. (Ще припомним, че в дефиницията на аналитична функция се предполага съществуването на $f'(z)$, но не се изисква тя да е непрекъсната).

По такъв начин се получава, че приведеното доказателство на теоремата на Коши е в сила не за всички функции, имащи производна, а само за такива, на които производната е непрекъсната, макар че във формулировката на теоремата това допълнително изискване не е дадено. То е изпуснато, тъй като има друго по-сложно доказателство на теоремата на Коши, в което се използва само съществуването на производна, а не се изисква непрекъснатостта ѝ. Ето защо теоремата на Коши е вярна за всички аналитични функции без допълнителното изискване за непрекъснатост на производната.

По-нататък (§ 10) ще се убедим в това, че производната на аналитичната функция е винаги аналитична и следователно непрекъсната. Но този извод ще се опира на теоремата на Коши. За да се избегне този “логически кръг“, в математическата литература се дава доказателство[43] на тази теорема, без да се иска

[43] Виж напр. А. И. Маркушевич “Теория на аналитичните функции“, Москва 1967 г., том 1, гл. 3, § 2, стр. 207 - 218 и том 2, гл. 5, § 4, стр. 92 - 100, (стр. 97, теорема 2 и стр. 100 - обобщена интегрална теорема).

непрекъснатост на $f'(z)$ (в нашия курс нямаме такава възможност). Това доказателство за първи път е дадено от Гурсà[44], а след това опростено от Прингсхайм[45].

Следствие 1. За всеки две криви L_1 и L_2 с общо начало z_0 и общ край z, изцяло лежащи в G (черт. 2.49), интегралите от еднозначната аналитична функция $f(z)$ имат една и съща стойност.

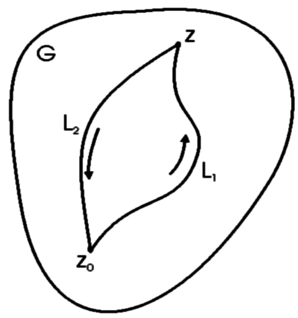
Доказателство: Нека L е произволна затворена крива, лежаща в G. Като използваме означенията на черт. 2.49 и теоремата на Коши, имаме

$$\oint_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L^-_2} f(z)dz = 0.$$

Следователно

$$\int_{L_1} f(z)dz = -\int_{L_2^-} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz,$$

което искахме да докажем.



Черт. 2.49

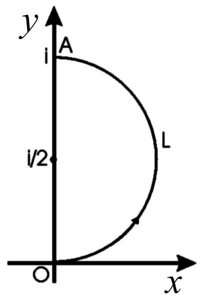
Това следствие ни дава възможност интеграла по произволна крива с начало в точката z_0 и край в точката z да запишем така:

(10) $$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

[44] E. Goursat (21.05.1858-25.11.1936) - френски математик.
[45] A. Pringsheim (08.09.1850-25.06.1941) - немски математик.

Пример 7. Пресметнете интеграла $\int\limits_L z^2 \cos z\, dz$, ако $L \equiv \left| z - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2},\ \operatorname{Re} z > 0$, от точка $O(z=0)$ до точка $A(z=i)$ (черт. 2.50).

Решение: Тъй като подинтегралната функция е аналитична за $\forall z$, то $\int\limits_L z^2 \cos z\, dz = \int\limits_0^i z^2 \cos z\, dz = z^2 \sin z\Big|_0^i - 2\int\limits_0^i z \sin z\, dz =$



Черт. 2.50

$$= -\sin i + 2z\cos z\Big|_0^i - 2\sin z\Big|_0^i =$$
$$= -i\operatorname{sh}1 + 2i\cos i - 2\sin i =$$
$$= i\left(2\operatorname{ch}1 - 3\operatorname{sh}1\right).$$

(Примерът може да се реши и с комплексно-параметрично задаване на кривата. Опитайте!)

Вече можем да дадем и друго решение на **пример 1**, използвайки следствие 1:

$$\int\limits_L z^2 dz = \int\limits_0^{2+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i\,.$$

Ако сега z_0 е фиксирана точка в (10), то (10) е функция на горната си граница, т.е.

(11) $$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Следствие 2. Функцията (11) е също аналитична в G и освен това

(12) $$F'(z) = f(z).$$

Доказателство: От равенството

$$\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right] = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta$$

и от това, че $f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta$ [46], имаме:

$$\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\zeta) - f(z)\right]d\zeta.$$

Следователно

$$\left|\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta) - f(z)||d\zeta| \le$$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|}.\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}|f(\zeta) - f(z)|.|\Delta z| = \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}|f(\zeta) - f(z)|.$$

[46] Това равенство се получава непосредствено от дефиницията на интеграл, като за крива на интегрирането избираме отсечката, съединяваща точките z и $z+\Delta z$.

Тъй като $f(z)$ е непрекъсната (по условие тя е аналитична), то за $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0$, такова че $\max\limits_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}\left|f(\zeta)-f(z)\right|<\varepsilon$, щом $|\Delta z|<\delta$.

Следователно $\left|\dfrac{\Delta F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$, щом $|\Delta z|<\delta$, а това означава, че е в сила (12).

Неопределен интеграл. Доказаното следствие 2 ни дава възможност да въведем понятието неопределен интеграл от аналитична функция.

От (12) е ясно, че функцията $F(z)$ е примитивна на $f(z)$. Ще докажем, че ако $F_1(z)$ и $F_2(z)$ са две примитивни функции на $f(z)$, то те се различават с константа.

Означаваме с $F(z)=F_2(z)-F_1(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$. Знаем, че $F'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (теорема 1, § 7). От друга страна $F'(z)=F_2'(z)-F_1'(z)=f(z)-f(z)=0$.

Следователно $\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, откъдето $u_x=0,\ v_x=0$ и $v_y=0,\ u_y=0$ или $u_x=u_y=0$, т.е. $u(x,y)=a$, и $v_x=v_y=0$, т.е. $v(x,y)=b$, където a и b са реални константи.

И така $F(z)=F_2(z)-F_1(z)=a+ib=C=const$ или $F_2(z)=F_1(z)+C$, което искахме да докажем.

Дефиниция 2. Множеството от всички примитивни функции на функцията $f(z)$ се нарича *неопределен интеграл* и се означава

$$\int f(z)dz = F(z) + C.$$

Тъй като според (12) интегралът $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ е примитивна функция на $f(z)$, то от доказаното по-горе следва, че

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) + C_0,\ C_0 = const.$$

Замествайки в това равенство z с z_0, получаваме

$$0 = F(z_0) + C_0 \text{, т.е. } C_0 = -F(z_0) \text{ или}$$

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0).$$

Ако сега в полученото равенство заместим z с фиксираната стойност z_1, получаваме *формулата на Нютон - Лайбниц*, а именно:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0).$$

Ще се възползваме от аналитичността, а следователно и от непрекъснатостта на производната $f'(z)$ на аналитичната функция (§ 10), за да изведем *правилото за смяна на променливата в интеграл от функция на комплексна променлива*.

Нека $f(z)$ е аналитична функция в областта G и L е ректифицируема крива, лежаща в тази област. Функцията $w = f(z)$ изобразява кривата L в някаква крива Γ, която е също ректифицируема. Наистина, ако $z = \lambda(t)$, $a \le t \le b$, е комплексно-параметричното уравнение на кривата L, то уравнението на кривата Γ ще има вида: $w = f\left[\lambda(t)\right]$.

Разглеждайки произволно разделяне на интервала $\left[a,b\right]$ с точките $a \equiv t_0, t_1, ..., t_n \equiv b$ и полагайки $z_k = \lambda\left(t_k\right)$, $w_k = f\left[\lambda\left(t_k\right)\right]$, намираме:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|w_{k+1} - w_k\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{z_k}^{z_{k+1}} f'\left(z\right)dz\right| \le \max_L\left|f'\left(z\right)\right| \sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left|dz\right| \le$$

$$\le \max_L\left|f'\left(z\right)\right|.l\,,$$

където l е дължината на кривата L.

От полученото неравенство следва и ректифицируемостта на кривата Γ.

Ще покажем сега, че за всяка функция $\Phi\left(w\right)$, непрекъсната върху кривата Γ, е в сила формулата

$$\int_\Gamma \Phi\left(w\right)d\,w = \int_L \Phi\left[f\left(z\right)\right]f'\left(z\right)dz\,,$$

която изразява правилото за смяна на променливата под знака на интеграла (*правилото за интегриране чрез субституция*).

За доказателството ще разгледаме интегралните суми, границата на които е $\int_\Gamma \Phi\left(w\right)\,dw$. Имаме :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Phi\left(w_k\right)\left(w_{k+1} - w_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\Phi\left[f\left(z_k\right)\right]\int_{z_k}^{z_{k+1}} f'\left(z\right)dz\,.$$

От друга страна интегралът $\int_L \Phi\left[f\left(z\right)\right]f'\left(z\right)dz$ може да се запише във вида: $\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \Phi\left[f\left(z\right)\right]f'\left(z\right)dz$ и следователно

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Phi\left(w_k\right)\left(w_{k+1} - w_k\right) - \int_L \Phi\left[f\left(z\right)\right]f'\left(z\right)dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left\{ \Phi\left[f\left(z_k\right)\right] - \Phi\left[f\left(z\right)\right]\right\} f'\left(z\right) dz .$$

При разделяне на интервала $\left[a,b\right]$ на достатъчно малки части всички величини $\max\limits_{t_k \le t \le t_{k+1}} \left| \Phi\left[f\left(z_k\right)\right] - \Phi\left[f\left(z\right)\right]\right|$ могат да станат по-малки от произволно $\varepsilon > 0$. Означавайки по-нататък $\max\limits_{L} | f'\left(z\right) |$ чрез M, получаваме:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left\{ \Phi\left[f\left(z_k\right)\right] - \Phi\left[f\left(z\right)\right]\right\} . f'\left(z\right) dz \right| \le$$

$$\le M\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left| dz \right| = M\varepsilon l .$$

Следователно интегралните суми $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Phi\left(w_k\right)\left(w_{k+1} - w_k\right)$ клонят към $\int\limits_{L} \Phi\left[f\left(z\right)\right] f'\left(z\right) dz$, когато $\max\limits_{k} \Delta s_k \to 0$ при $n \to \infty$ $\left(k = 0,1,...,n\right)$ (Δs_k са дъгичките от кривата L, съответстващи на разделянето на $\left[a,b\right]$).

Ще добавим още, че техниката за пресмятане на неопределени интеграли в комплексния анализ в основата си е същата, както в реалния. В частност таблицата на основните интеграли в двата случая е еднаква. Така например са в сила формулите:

$$\int e^z dz = e^z + C ; \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C ,\ n \in \mathbb{N},\ n \ne -1 ;$$

$$\int \sin z\, dz = -\cos z + C ; \int \frac{dz}{z} = \mathrm{Ln}\, z + C ; \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \mathrm{Arctg}\, z + C$$

и т.н.. Но тук например $\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \mathrm{Ln} \frac{z-i}{z+i} + C$ и други подобни.

Теорема 4. (Коши) (*За многосвързана област*) Нека L е затворена Жорданова ректифицируема крива, лежаща вътре в едносвързаната област G, а $L_1, L_2, ..., L_n$ са криви, имащи същите свойства като L и разположени в нея. Нека, освен това, всяка крива L_k лежи извън всяка друга крива L_j $\left(k, j = 1, 2, ..., n; j \neq k\right)$, като тези криви нямат общи точки, както помежду си, така и с кривата L. Нека многосвързаната област D, ограничена от кривите $L, L_1, L_2, ..., L_n$ се съдържа в G и функцията $f\left(z\right)$ е еднозначна и аналитична в D. Тогава

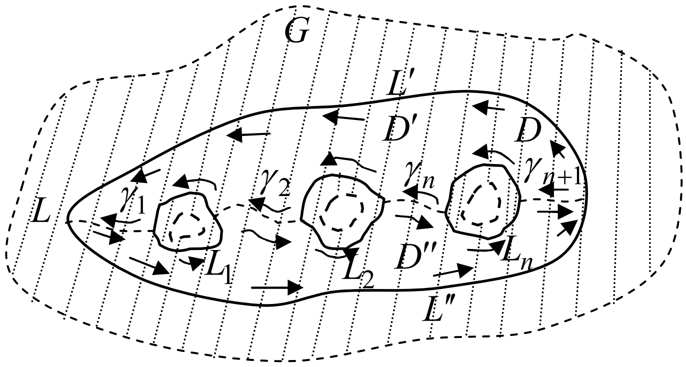
(13) $$\oint_L f\left(z\right) dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f\left(z\right) dz ,$$

където интегрирането на всички интеграли в (13) става в една и съща посока (напр. положителна) по еднократно описани криви.

Доказателство: Образуваме от многосвързаната област D две едносвързани области D' и D'' (горна и долна) като прекарваме разрезите γ_k ($k = 1, 2, ..., n+1$) - Жорданови ректифицируеми дъги. Тези дъги нямат помежду си общи точки и лежат в областта D (с изключение на точките, лежащи на границата на областта D) (черт. 2.51).

Началните и крайните точки на дъгите $\gamma_1, ..., \gamma_{n+1}$ разделят всяка крива $L, L_1, L_2, ..., L_n$ на две дъги, които ние ще означаваме така, както съответната крива, но с едно (за горната страна) и с две (за долната) "примчета" отгоре. Цялата горна затворена крива ще означим с Γ', а долната - с Γ''. (За определеност ще използваме положителна посока на обхождане при интегрирането.)

Съгласно теоремата на Коши за едносвързана област имаме:



Черт. 2.51

$$0=\oint_{\Gamma'} f(z)\,dz=\int_{L'} f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k'^{-}} f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{\gamma_k^{-}} f(z)\,dz$$

и

$$0=\oint_{\Gamma''} f(z)\,dz=\int_{L''} f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k''^{-}} f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

Събираме левите и десните страни на горните две равенства. Отчитайки, че

$$\int_{L'} f(z)\,dz+\int_{L''} f(z)\,dz=\oint_{L} f(z)\,dz;$$

$$\int_{L_k'^{-}} f(z)\,dz+\int_{L_k''^{-}} f(z)\,dz=\oint_{L_k^{-}} f(z)\,dz \quad (k=1,2,\dots,n);$$

$$\int_{\gamma_k^{-}} f(z)\,dz+\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=0 \quad (k=1,2,\dots,n),$$

получаваме

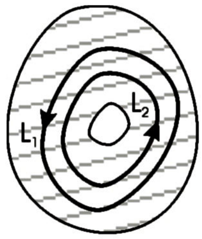
$$0=\oint_{L} f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k^{-}} f(z)\,dz,$$

т.е.

$$\oint_L f(z)\,dz = -\sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k^-} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)\,dz\,,$$

което и трябваше да докажем.

Следствие 3. Интегралите по два непресичащи се контура са равни, ако подинтегралната функция $f(z)$ е аналитична в двусвързаната област, ограничена от тези криви (черт. 2.52), и интегрирането е в една и съща посока, т.е. $\oint_{L_1} f(z)\,dz = \oint_{L_2} f(z)\,dz$.



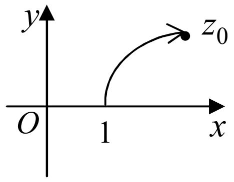
Черт. 2.52

Забележка 2. В случая, когато подинтегралната функция $f(z)$ е аналитична в неедносвързана област, интегралът $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z)$ може и да зависи от пътя на интегриране.

Пример 8. Интегралът $\int_1^{z_0} \frac{dz}{z}$ не зависи от пътя на интегриране в дясната полуравнина $\mathrm{Re}\,z > 0$ (черт. 2.53), тъй като тя е едносвързана област и в нея подинтегралната функция $f(z) = \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ е аналитична.

Следователно $\int_1^{z_0} \frac{dz}{z} = \ln z\Big|_1^{z_0} = \ln z_0 - \ln 1 = \ln z_0$.

Нека сега вземем кръга $|z| < 2$ (черт. 2.54). Тъй като

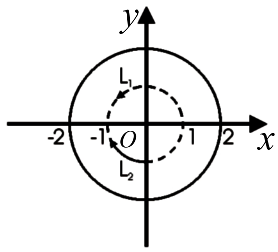


Черт. 2.53

функцията $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z}$ не е дефинирана в точката $z=0$, тя е аналитична в двусвързаната област, която се получава, ако от кръга $|\,z\,|<2$ махнем началото на координатната система $z=0$.

Изчисляваме интеграла от $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z}$ от точка $z=1$ до точка $z=-1$ първо по горната полуокръжност $L_1\equiv|\,z\,|=1$, а после по долната: $L_2\equiv|\,z\,|=1$.

O



Черт. 2.54

Комплексно-параметричното уравнение на окръжността $|\,z\,|=1$ е $z=e^{it}$, където t е реален параметър.

За L_1 имаме $0\le t\le\pi$, а за L_2, t се мени от 0 до $-\pi$.

Следователно

$$\int\limits_{L_1}\frac{dz}{z}=\int\limits_0^{\pi}\frac{ie^{it}dt}{e^{it}}=\pi i\text{, а }\int\limits_{L_2}\frac{dz}{z}=\int\limits_0^{-\pi}\frac{ie^{it}dt}{e^{it}}=-\pi i\text{, т.е. }\int\limits_{L_1}\frac{dz}{z}\neq\int\limits_{L_2}\frac{dz}{z}.$$

Доказаната в този параграф теорема 3, наречена основна теорема на Коши (или в някои учебници - интегрална теорема на Коши), е една от най-важните теореми в теорията на функциите на комплексна променлива. За първи път тя е публикувана през 1825 г. в мемоарите на Коши, но от писмото на Гаус до Бесел[41] от 1811 г. се вижда, че тази теорема е била известна на Гаус още тогава.

Даденото доказателство принадлежи на немския математик Риман. То е много просто, но, както вече се спомена, изисква

[41] F.W.Bessel (22.07.1784-17.03.1846) - немски астроном.

непрекъснатост на частните производни от първи ред на функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$, а следователно и непрекъснатост на $f'(z)$. Но вече отбелязахме, че има доказателство на френския математик Гурсà, което не се нуждае от това изискване. Доказателството без използване на непрекъснатостта на $f'(z)$ има това принципно значение, че от теоремата на Коши следва съществуването на производни от произволен ред (§ 10) за аналитичната функция $f(z)$ и следователно аналитичност и непрекъснатост както на $f'(z)$, така и на производните от кой да е ред. В частност ще бъде аналитична не само функцията $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ (за доказателството на което беше използвана фактически само непрекъснатостта на $f(z)$ и, разбира се, независимостта на интеграла от пътя, което е равносилно на равенството на нула на този интеграл по произволен затворен контур), но и $F'(z)=f(z)$. От всичко казано се вижда, че е в сила следната теорема:

Теорема 5. Ако $f(z)$ е еднозначна и непрекъсната в едносвързаната област G и интегралът $\oint\limits_L f(z)dz$ по произволен затворен контур L, разположен в тази област, е равен на нула, то функцията $f(z)$ е аналитична в областта G.

Тази теорема е обратна на теоремата на Коши. Тя носи името "теорема на Морера"[42].

[42] G.Morera (16.07.1856-08.02.1909) - италиански математик.

Задачи

I. Пресметнете интегралите:

1) $\int\limits_L \left(1+i-2\bar{z}\right)dz$, ако:

а) L е отсечката $\overline{AB}: A\left(z=0\right), B\left(z=1+i\right)$;

отг. а) $2\left(-1+i\right)$

б) L е дъгата $\overset{\frown}{AB}: y=x^2; A\left(z=0\right), B\left(z=1+i\right)$

отг. б) $-2+\dfrac{4}{3}i$

2) $\int\limits_L |z|\,dz$, ако:

а) L е полуокръжността $|z|=1$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}\right)$; **отг.** $2i$

б) $L\equiv ABC=\overline{AB}\cup\overline{BC};\ A\left(z=0\right),\ B\left(z=-1+i\right)$,

$C\left(z=1+i\right)$; **отг.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

в) L е полуокръжността $|z|=\sqrt{2}$ $\left(\dfrac{3\pi}{4}\le \arg z\le \dfrac{5\pi}{4}\right)$

отг.

$-2\sqrt{2}\,i$

3) $\int\limits_L \dfrac{z}{\bar{z}}dz$, ако L е границата на областта $D\equiv\begin{cases}1<|z|<2\\ \operatorname{Im} z>0\end{cases}$,

описана в положителна посока от точка $z=2$ **отг.** $\dfrac{4}{3}$

4) $\int\limits_L z\,\mathrm{Re}\,z^2 dz$, ако:

а) L е отсечката $\overline{AB}: A(z=0),\ B(z=1+2i)$; **отг.** $\frac{9}{4}-3i$

б) L е полуокръжността $|z|=R\ (\mathrm{Im}\,z\geq 0)$, описана в положителна посока **отг.** $\frac{R^4\pi i}{2}$

5) $\int\limits_L z\,\overline{z}\,dz$, ако $L\equiv ABC=\overset{\frown}{AB}\cup\overline{BC}$, където $\overset{\frown}{AB}\equiv|z|=1$ $(\mathrm{Re}\,z\geq 0,\ \mathrm{Im}\,z\geq 0)$, а $\overline{BC}$ е отсечка: $B(z=1)$ и $C(z=0)$

отг. $\frac{2}{3}-i$

6) $\int\limits_L z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$, ако $L\equiv\overline{AB}: A(z=0),\ B(z=1+i)$ **отг.** i

7) $\int\limits_L |z|\overline{z}dz$, ако $L\equiv|z|=4\ \ (\mathrm{Re}\,z\geq 0)$ е полуокръжност, описана в положителна посока **отг.** $64\pi i$

8) $\int\limits_L \mathrm{Im}\,z^3 dz$, ако $L\equiv\overline{AB}: A(z=0),\ B(z=2+2i)$ **отг.** $8(1+i)$

9) $\int\limits_L \overline{z}^2 dz$, ако $L\equiv\overline{AB}: A(z=0),\ B(z=1+i)$ **отг.** $\frac{2}{3}(1-i)$

10) $\int\limits_L \frac{\overline{z}}{z}dz$, ако:

а) L е границата на областта $D\equiv\begin{cases}1<|z|<2\\ \mathrm{Re}\,z>0\end{cases}$, описана в положителна посока от точка $z=-2i$; **отг.** $4i$

б) $L \equiv ABMN = \overline{AB} \cup \overset{\frown}{BM} \cup \overline{MN}$: $A(z=-2)$, $B(z=-1)$, $M(z=1)$, $N(z=2)$; $\overset{\frown}{BM} \equiv |z|=1\ (\operatorname{Im} z \geq 0)$

отг. 0

11) $\int\limits_L \left(\overline{z}^2 + z^2\right) dz$, ако $L \equiv \overline{AB}$: $A(z=0)$, $B(z=1+i)$ **отг.** 0

12) $\int\limits_L \frac{dz}{z-i}$, ако $L \equiv OAB = \overset{\frown}{OA} \cup \overline{AB}$: $O(z=0)$, $A(z=2i)$, $B(z=3i)$; $\overset{\frown}{OA} \equiv |z-i| = 1\ (x>0)$ **отг.** $\pi i + \ln 2$

13) $\int\limits_L \left(z^2 + z \operatorname{Re} z^2\right) dz$, ако $L \equiv \overline{AB}$: $A(z=0)$, $B(z=1+2i)$

отг. $\frac{-17-44i}{12}$

14) $\int\limits_L \overline{z}^2 dz$, ако $L \equiv \overset{\frown}{AB} \equiv y = x^2$: $A(z=0)$, $B(z=1+i)$

отг. $\frac{14}{15} - \frac{i}{3}$

15) $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right) dz$, ако $L \equiv ABC = \overset{\frown}{AB} \cup \overline{BC}$: $\overset{\frown}{AB} \equiv |z| = 1$ $(\operatorname{Im} z \geq 0)$; $B(z=1)$, $C(z=2)$ **отг.** $\frac{1}{3}$

16) $\int\limits_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz$, ако $L \equiv |z| = R\ (\operatorname{Im} z \geq 0)$, описана в положителна посока **отг.** $\frac{2}{3} R^4$

17) $\int\limits_L e^{|z|^2} \operatorname{Im} z\, dz$, ако $L \equiv \overline{AB}$: $A(z=1+i)$, $B(z=0)$

отг. $\frac{1+i}{4}\left(1-e^{2}\right)$

18) $\frac{1}{2i}\oint\limits_{L}\overline{z}\,dz$, ако $L\equiv|z|=R$, описана в положителна посока

отг. πR^{2}

19) $\int\limits_{L}z\,|z|\,dz$, ако $L\equiv|z|=1\ \left(\operatorname{Im}z\geq 0\right)$, описана в положителна посока

отг. 0

20) $\int\limits_{L}\operatorname{Re}\left(\sin z\right)\cos z\,dz$, ако L е отсечката $\operatorname{Re}z=\frac{\pi}{4}$ за $\left|\operatorname{Im}z\right|\leq 1$, в посока на оста Oy.

отг. $\frac{i}{4}\left(2+\operatorname{sh}2\right)$

21) $\int\limits_{L}\left(z^{2}+z\overline{z}\right)dz$, ако $L\equiv|z|=1\ \left(0\leq\arg z\leq\pi\right)$ **отг.** $-\frac{8}{3}$

22) $\int\limits_{L}\frac{z+2}{z}dz$, ако:

а) $L\equiv z=2e^{i\varphi}\ \left(0\leq\varphi\leq\pi\right)$; **отг.** $-4+2\pi i$

б) $L\equiv z=2e^{i\varphi}\ \left(-\pi\leq\varphi\leq\pi\right)$ **отг.** $4\pi i$

23) $\int\limits_{L}\left(y-x-3x^{2}\,i\right)dz$, ако $L\equiv\overline{AB}:A\left(z=0\right),\ B\left(z=1+i\right)$

отг. $1-i$

24) $\int\limits_{L}e^{\overline{z}}dz$, ако L е начупената линия ABC: $A\left(z=0\right)$, $B\left(z=1\right)$, $C\left(z=1+i\right)$

отг. $2e-1-e^{1-i}$

25) $\int\limits_{L}|z|\operatorname{Re}z\,dz$, ако $L\equiv\widehat{AOB}\cup\overline{BC}:\widehat{AOB}\equiv y=x^{2}$;

$A(z=-1+i),\ O(z=0),\ B(z=1+i),\ C(z=2+i)$

отг. $\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)+i\frac{8}{15}\left(1+\sqrt{2}\right)$

II. Докажете, че подинтегралната функция е аналитична и пресметнете интегралите :

1) $\int_L \left(\cos iz+3z^2\right)dz$, ако $L\equiv \overline{AB}\cup\overset{\frown}{BA}: \overset{\frown}{BA}\equiv |z|=1\ \left(\operatorname{Im}z\geq 0\right)$; $A\left(z=-1\right)$, $B(z=1)$ **отг.** 0

2) $\int_{1+i}^{2i}\left(z^3-z\right)e^{\frac{z^2}{2}}dz$ **отг.** $-7e^{-2}+\left(3-2i\right)\left(\cos 1+i\sin 1\right)$

3) $\int_L\left(\operatorname{ch}z+z\right)dz$, ако $L\equiv|z|=1\left(\operatorname{Im}z\leq 0\right)$, описана в положителна посока **отг.** $2\operatorname{sh}1$

4) $\int_L z^3e^{z^4}dz$, ако L е начупената линия $ABC: A\left(z=i\right)$, $B(z=1)$, $C\left(z=0\right)$ **отг.** $\frac{1}{4}\left(1-e\right)$

5) $\oint_L \frac{\ln z}{z^2}dz$, ако $L\equiv\left|z-2\right|=1$ **отг.** 0

6) $\int_L\left(\sin iz+z^2e^z\right)dz$, ако $L\equiv|z|=1\ \left(\operatorname{Re}z\geq 0\right)$

отг. $2i\left(\sin 1-2\cos 1\right)$

7) $\int_L\left(\operatorname{sh}z+\cos iz\right)dz$, ако L е начупената линия $ABC: A\left(z=0\right)$, $B\left(z=-1\right)$, $C(z=i)$ **отг.** e^i-1

8) $\oint_L\left(\sin^2 iz+\frac{1}{z^2}\right)dz$, ако $L\equiv 4x^2-16x+y^2+12=0$ **отг.** 0

9) $\int\limits_{1}^{i}\left(\frac{\ln^3 z}{z}+z\right)dz$ **отг.** $\frac{\pi^4}{64}-1$

10) $\int\limits_{L}\left(z\operatorname{ch}iz+4z^3\right)dz$, ако $L\equiv|z|=1\ \left(\operatorname{Im}z\geq 0\right)$, описана в положителна посока **отг.** 0

11) $\oint\limits_{|z|=2}\left(z^2\operatorname{ch}z+e^z\right)dz$ **отг.** 0

12) $\oint\limits_{L}\left(z\ln z+\operatorname{sh}^2 iz\right)dz$, ако $L\equiv|z-2i|=1$ **отг.** 0

13) $\oint\limits_{L}z\cos^3 iz\,dz$, ако $L\equiv|z+i|=2$ **отг.** 0

14) $\int\limits_{L}z^2\sin^2 z\,dz$, ако $L\equiv|z|=1\ \left(\operatorname{Im}z\geq 0\right)$, описана в положителна посока **отг.** $\frac{1}{4}\left(\sin 2+2\cos 2\right)-\frac{1}{3}$

15) $\int\limits_{0}^{i}\left(z-i\right)e^{-z}dz$ **отг.** $1-\cos 1+i\left(\sin 1-1\right)$

16) $\int\limits_{1}^{i}z\sin z\,dz$ **отг.** $\cos 1-\sin 1-ie^{-1}$

17) $\int\limits_{0}^{i}z\cos z\,dz$ **отг.** $e^{-1}-1$

18) $\oint\limits_{L}\ln z\,dz$, ако $L\equiv x^2+\left(y-3\right)^2=1$ **отг.** 0

19) $\oint\limits_{L}z\ln^3 z\,dz$, ако $L\equiv|z+1-i|=1$ **отг.** 0

20) $\int_0^i \left(z - z^2\right)\mathrm{ch}z\,dz$ **отг.** $1-(1+i)\sin 1-(1-2i)\cos 1$

21) $\int_L (z+1)e^z dz$, ако $L \equiv |z|=1\ (\mathrm{Re}\,z \ge 0)$, описана в положителна посока **отг.** $2i\cos 1$

22) $\int_L \left(3z^2+4z+1\right)dz$, ако $L \equiv \overline{AB}: A(z=1),\ B(z=1-i)$

отг. $-5-7i$

23) $\int_L \left(12z^5+4z^3+1\right)dz$, ако $L \equiv \overline{AB}: A(z=1),\ B(z=i)$

отг. $-5+i$

24) $\int_L \left(z^2+\cos z\right)dz$, ако L е начупената линия $ABC: A(z=0)$, $B(z=1),\ C(z=i)$ **отг.** $i\left(\mathrm{sh}1-\frac{1}{3}\right)$

25) $\int_{\overline{AB}} \left(z\mathrm{shi}z+e^z\right)dz$, ако $\overline{AB}$ е отсечка: $A(z=0),\ B(z=i)$

отг. $\mathrm{ch}1+\cos 1-sh1-1+i\sin 1$

26) $\int_L \left(3z^2+2z\right)dz$, ако $L \equiv y=x^2$ от точка $z=0$ до точка $z=1+i$ **отг.** $-2+4i$

27) $\int_L \left(z^2+1\right)dz$, ако L е начупената линия ABC: $A(z=0)$, $B(z=-1+i),\ C(z=i)$. **отг.** $\frac{2}{3}i$

28) $\int_L (2z+1)dz$, ако $L \equiv \overset{\frown}{AB} \equiv y=x^3$ от точка $A(z=0)$ до точка $B(z=1+i)$ **отг.** $1+3i$

29) $\int\limits_L \left(\sin z + 3z^5\right)dz$, ако L е начупената линия ABC: $A\left(z=0\right)$, $B\left(z=1\right)$, $C(z=2i)$. **отг.** $-31-\mathrm{ch}2$

30) $\int\limits_L \left(z^3 + e^z\right)dz$, ако $L \equiv |\,z\,|=2$ $\left(\mathrm{Re}\,z \geq 0\right)$, описана в положителна посока **отг.** $2\,\mathrm{sh}\,2$

31) $\int\limits_L \mathrm{tg}\,z\,dz$, ако $L \equiv y = x^2$ от точка $A\left(z=0\right)$ до точка $B\left(z=1+i\right)$ **отг.** $-\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{sh}^2 1 + \cos^2 1\right) + i\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}1.\mathrm{th}1\right)$

III. Намерете сумите на следните степенни редове в кръга $|\,z\,|<1$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,z^{n-1}$

Решение: Използваме казаното за степенните редове след теорема 2 на настоящия параграф и забележка 2, § 7. Интегрираме дадения ред в граници от $z=0$ до z. Получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^z \zeta^{n-1}d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} n\left.\frac{\zeta^n}{n}\right|_0^z = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z},\ |\,z\,|<1.$$

Полученото равенство диференцираме спрямо z:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^{n-1} = \frac{1-z+z}{\left(1-z\right)^2} = \frac{1}{\left(1-z\right)^2},\ |\,z\,|<1.$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ **отг.** $\frac{z}{(1-z)^2}$

(***Упътване***: Използвайте резултата на зад. 1.)

3) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$ **отг.** $\frac{2}{(1-z)^3}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ **отг.** $-\ln(1-z)$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ **отг.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ **отг.** $\ln(1+z)$

§ 10. Интегрална формула на Коши и формула за производните

Теорема 1. Нека функцията $f(z)$ е еднозначна и аналитична в многосвързаната област G, а L е затворена Жорданова ректифицируема крива, принадлежаща на G заедно със своята вътрешност D. Тогава за всяка точка $z_0 \in D$ е в сила *интегралната формула на Коши*

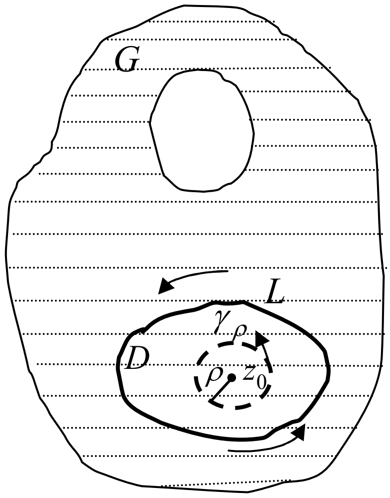
(1) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Тук кривата L се описва еднократно в положителна посока.

Тази формула изразява стойността на аналитичната функция вътре в затворената крива чрез стойностите на същата функция върху самата крива.

Доказателство: С център точката z_0 описваме окръжност γ_ρ с достатъчно малък радиус ρ, такъв че кръгът $|z-z_0|\le\rho$ да лежи вътре в L (черт. 2.55). Тогава за двусвързаната област, заградена от кривите L и γ_ρ, прилагаме следствие 3 от теоремата на Коши за многосвързана област (§ 9) към аналитичната функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$. Получаваме

(2) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$



Черт. 2.55

Следователно за доказателството на (1) е достатъчно да установим равенството

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

или равенството

(3) $$\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-2\pi i f(z_0)=$$

$$=\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\oint_{\gamma_\rho}\frac{dz}{z-z_0}=0.$$

(Тук използваме резултата на пример 2, § 9, при $m=1$).

Следователно, за да докажем равенство (1), достатъчно е да докажем равенството

(4) $$\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0.$$

От непрекъснатостта на $f(z)$ (по условие тя е аналитична) в точката z_0 неравенството $\left|f(z)-f(z_0)\right| < \varepsilon$, $z \in \gamma_\rho$, се изпълнява за $\forall \varepsilon > 0$, ако $\rho < \delta(\varepsilon)$. Оттук получаваме

$$\left|\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}.2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Следователно

(5) $$\lim_{\rho\to 0}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0.$$

Интегралът, стоящ в (5), е равен на лявата част на равенство (3) и от равенство (2) се вижда,че не зависи от ρ.

И така, той е равен на нула при всички разглеждани стойности на ρ. Следователно равенство (4) е в сила, а заедно с него е в сила и интегралната формула (1).

Дефиниция. Интегралът

$$I(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

се нарича *интеграл на Коши.*

Забележка. Ако z_0 принадлежи на външността E на кривата L, то подинтегралната функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ е аналитична не само върху L, но и навсякъде вътре в L, т.е. в областта D, заградена от L (знаменателят $z-z_0 \neq 0$ върху L и в D). По теоремата на Коши за едносвързана област (§ 9) интегралът е равен на нула в този случай. Следователно

$$I(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\begin{cases} f(z_0), & z_0\in D\\ 0, & z_0\in E\end{cases}.$$

За $z_0\in L$ интегралът на Коши, общо казано, губи смисъл не само като собствен, но и като несобствен интеграл.

Пример 1. Намерете на колко е равен интегралът на Коши $I(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{z^2-1}{z-z_0}dz$, където $L\equiv|z+i|=2$, ако $z_0=0$; $2i$ и $1-i$.

Решение: Кривата $L\equiv|z+i|=2$ е окръжност с център $z=-i$ и радиус $R=2$ (черт. 2.56). Каноничното ѝ уравнение е:

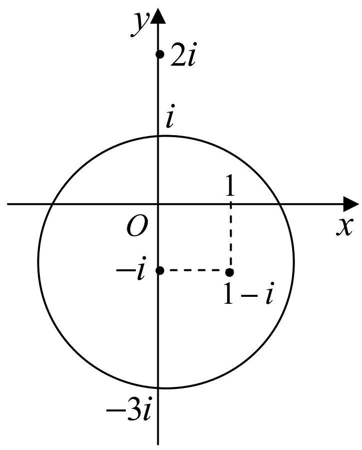
$$L\equiv x^2+(y+1)^2=2^2.$$

Тогава $I(0)=\left(z^2-1\right)\Big|_{z=0}=-1$;

$I(2i)\equiv 0$, тъй като $z_0=2i\in E$;

$$I(1-i)=\left(z^2-1\right)\Big|_{z=1-i}=$$

$$=(1-i)^2-1=-1-2i.$$



Черт. 2.56

Тъй като комплексно-параметричното уравнение на окръжността γ_ρ е $z=z_0+\rho e^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, то формула (1) може да се преработи във вида

(6)
$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+\rho e^{i\varphi}\right)}{\rho e^{i\varphi}}i\rho e^{i\varphi}d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+\rho e^{i\varphi}\right)d\varphi.$$

С други думи, получаваме следната *теорема за средните стойности:*

Теорема 2. (Гаус) Ако функцията $f(z)$ е аналитична върху окръжността $\left|z-z_0\right|=\rho$ (ρ- произволен радиус, различен от 0 и ∞) и в кръга, ограничен от тази окръжност, то нейната стойност в центъра на кръга z_0 е равен на средно аритметичното на нейните стойности върху окръжността на този кръг.

Да означим $\max\limits_{\gamma_\rho}\left|f(z)\right|=M(\rho)$. Тогава от формула (6) имаме:

(7)
$$\left|f\left(z_0\right)\right|\le M(\rho).$$

От непрекъснатостта на функцията $f(z)$ върху окръжността γ_ρ стойността $M(\rho)$ се достига в някоя точка от тази окръжност. Тъй като нейният радиус може да се вземе произволно малък, то от неравенство (7) следва, че в която и да е околност на точката $z_0\in D$ съществуват други точки, в които модулът на аналитичната функция е не по-малък, отколкото нейният модул в точката z_0. Следователно модулът на функция, аналитична в областта D, не може да има строг максимум в нито една точка от областта. В този извод се заключава така нареченият *принцип на максимума на модула.* Но и не строгият максимум на модула не може да се достигне във вътрешна точка на областта, ако $f(z)\ne const$. И така в сила е следната теорема:

Теорема 3. Модулът на функцията $f(z)$, аналитична в областта D и не равна тъждествено на константа, не може да има максимум в нито една точка на областта.

Доказателство: Ще използваме метода на допускане на противното.

Да предположим, че в някоя точка $z_0 \in D$ модулът на функцията $f(z) \neq const$ има максимум M. Полагаме $\left|f(z_0)\right| = M$. Тогава в достатъчно малка околност U_0 на точката z_0 имаме $\left|f(z)\right| \leq M$. Можем да смятаме, че $M \neq 0$, тъй като в противен случай $f(z) = 0$ във всички точки на U_0, откъдето следва, че $f(z) \equiv 0$, което противоречи на условието на теоремата.

Ще покажем, че във всички точки на U_0 се изпълнява равенството $\left|f(z)\right| = M$. Наистина, ако допуснем, че в точката $z_1 \in U_0$, $\left|z_1 - z_0\right| = \rho > 0$, $\left|f(z_1)\right| < M$, то за интеграла $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) d\varphi$ получаваме оценката

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) d\varphi\right| < M,$$

тъй като върху окръжността $\left|z - z_0\right| = \rho$ ще се намери дъга, съдържаща z_1, във всички точки на която $\left|f(z)\right| < M$. Но тази оценка противоречи на равенство (6):

$$M = \left|f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) d\varphi\right|.$$

И така от направеното допускане следва съществуването на някаква околност на точката z_0, в която модулът на функцията запазва постоянна стойност. Ако $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то във всички точки на U_0 имаме:

$$\left|f(z)\right|^2 = u^2+v^2 = M^2;$$

или, диференцирайки дясната страна на това равенство по x и y, получаваме:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}.$$

Тъй като $M\neq 0$, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ не се обръщат едновременно в нула в точките на U_0. Затова детерминантата на горната система е равна на нула

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Използвайки условията на Коши - Риман, оттук получаваме $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$ и следователно $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$. Тогава $u(x,y)=a$ (a - реална константа).

Аналогично $\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2=0$, откъдето и $v(x,y)=b$ (b - реална константа).

Следователно $f(z)=a+ib=C=const$ в U_0.

По теоремата за единственост (цитирана по-долу) последното равенство се изпълнява в цялата област D, което противоречи на условието на теоремата. И така теорема 3 или принципът за максимума на модула е доказан.

Теорема 4. (**Витали**[49]) (*За единственост*) Съществува най-много една функция $f(z)$, еднозначна и аналитична в областта D, приемаща дадени стойности в някое множество от точки E в тази област, което има поне една крайна точка на сгъстяване $z_0 \in D$.

С помощта на теорема 2 за средните стойности може да се докаже следната теорема, която в някои учебници носи същото наименование като теорема 3 :

Теорема 5. Ако функцията $f(z) \neq const$ е аналитична в затворената област $\bar{D} = D \bigcup L$, то модулът на тази функция достига най-голямата си стойност само върху контура L на областта D.

Ще пропуснем доказателството на тази теорема.

Очевидно аналогичен *принцип за минимума на модула* на аналитичната функция не е в сила, тъй като модулът има минимум във всяка нула на аналитичната функция (за нулите на аналитичните функции ще говорим по-нататък в § 11). От принципа за максимума (теорема 3) следва, че модулът на аналитичната функция $f(z) \neq const$ не може да има минимум в нито една точка на областта, която не е нула на функцията $f(z)$.

Наистина, ако $f(z_0) \neq 0$, то от непрекъснатостта на функцията $f(z)$ неравенството $f(z) \neq 0$ е в сила и в някаква околност U на точката z_0, съдържаща се в областта D.

---

[49] G. Vitali (26.08.1875–29.02.1932) - италиански математик и механик.

Следователно в тази околност функцията $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ е аналитична и не е тъждествено константа; затова модулът на $\varphi(z)$ не може да има максимум в точката z_0. Връщайки се към $f(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$, получаваме, че модулът на $f(z)$ няма минимум в точка z_0.

Използвайки сега теорема 5 за модула на функцията $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, веднага може да се покаже, че при условията на тази теорема и допълнителното условие $f(z)\neq 0$ в $\bar{D}$, модулът на функцията $f(z)$ достига своята най-малка стойност също на контура L на областта D и само там.

Теорема 6. Аналитичната функция е безброй много пъти диференцируема, при което е в сила формулата

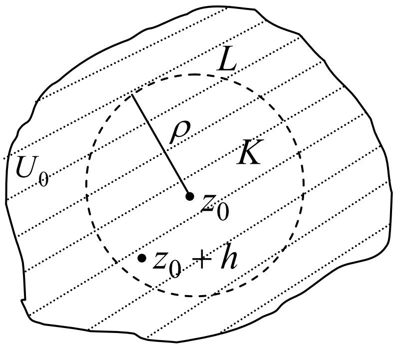
(8) $$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \ n=1,2,...$$ [50].

Доказателство: Нека функцията $f(z)$ е аналитична в някоя точка z_0. Както знаем това означава, че тя е аналитична и в някаква околност U_0 на точката z_0. Вземаме кръг K с център в точката z_0 и толкова малък радиус ρ, че кръгът K и неговата окръжност

---

[50] Можем да включим и $n=0$. Тогава се получава интегралната формула на Коши (1), тъй като $f^{(0)}(z_0)=f(z_0)$, а $0!=1$.

$L \equiv | z - z_0 | = \rho$ да лежат в U_0 (черт. 2.57). Тогава, съгласно интегралната формула на Коши (1), имаме:



Черт. 2.57

(9) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Даваме на z_0 нарастване h, такова че точката $z_0 + h$ също да лежи вътре в K. Тогава новата стойност на функцията ще бъде:

(10) $$f\left(z_0 + h\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f\left(z\right)}{z - \left(z_0 + h\right)} dz .$$

Изваждайки от (10) равенство (9), получаваме:

$$f\left(z_0 + h\right) - f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f\left(z\right) \left(\frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} \right) dz =$$

$$= \frac{h}{2\pi i} \oint_L \frac{f\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)\left(z - z_0 - h\right)} dz ,$$

т.е.

(11) $$\frac{f\left(z_0 + h\right) - f\left(z_0\right)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)\left(z - z_0 - h\right)} dz .$$

След граничен преход в равенство (11) при $h \to 0$ получаваме:

(12) $$f'\left(z_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(z_0 + h\right) - f\left(z_0\right)}{h} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \to 0} \oint_L \frac{f\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)\left(z - z_0 - h\right)} dz = \frac{1!}{2\pi i} \oint_L \frac{f\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)^2} dz .$$

И така, получихме формула (8) при $n=1$. При това ние използвахме граничен преход под знака на интеграла, без да обосновем това. За да се убедим, че

$$\lim_{h\to 0}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz=\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,$$

ще докажем, че разликата

$$\Delta=\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz-\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$$

$$=\oint_L \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}dz$$

клони към нула при $h\to 0$.

Ще използваме свойство 4, § 9 за интеграл от функция на комплексна променлива. Нека и тук $M=\max_{z\in L}\left|f(z)\right|$. При интегрирането по L точка z се движи само по окръжността L и затова $\left|z-z_0\right|=\rho$, а

$$\left|z-z_0-h\right|=\left|(z-z_0)-h\right|\geq |z-z_0|-|h|=\rho-|h|.$$

От всичко казано до тук следва, че

$$|\Delta|\leq \frac{M|h|}{\rho^2(\rho-|h|)}2\pi\rho \underset{h\to 0}{\to} 0,$$

с което е обоснован граничният преход под знака на интеграла в равенство (12).

Аналогично, заменяйки в получената формула (12) z_0 с z_0+h и извършвайки предишните изчисления, намираме, че

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz,$$

т.е. формула (8) е вярна и при $n=2$.

Продължаваме по индукция. Допускаме, че формула (8) е вярна и при произволно $n \geq 3$, т.е., че

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz .$$

Ще докажем, че тази формула е в сила и за $n+1$. Постъпвайки, както при $n = 1$, получаваме, че

$$\frac{f^{(n)}(z_0 + h) - f^{(n)}(z_0)}{h} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{(z - z_0)^{n+1} - (z - z_0 - h)^{n+1}}{h(z - z_0)^{n+1}(z - z_0 - h)^{n+1}} f(z) dz .$$

Правим граничен преход при $h \to 0$ в горното равенство (обосновката на граничния преход под знака на интеграла се прави аналогично на дадената по-горе), откъдето намираме, че

$$\lim_{h \to 0} \frac{(z - z_0)^{n+1} - (z - z_0 - h)^{n+1}}{h(z - z_0 - h)^{n+1}} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \left(1 - \dfrac{h}{z - z_0}\right)^{n+1}}{h\left(1 - \dfrac{h}{z - z_0}\right)^{n+1}} .$$

Полагаме в горната граница $1 - \dfrac{h}{z - z_0} = t$. Тогава $t \to 1$ при $h \to 0$, а $h = (1 - t)(z - z_0)$. Получаваме

$$\lim_{t \to 1} \frac{1 - t^{n+1}}{(1 - t)(z - z_0)t^{n+1}} = \frac{n+1}{z - z_0} .$$

(Използваме познатата граница: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$. Може да се използва и правилото на Лопитал.)

Следователно

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h}=f^{(n+1)}(z_0)=$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{n+1}{(z-z_0)^{n+2}}f(z)dz=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}dz,$$

с което теоремата е доказана.

И така, от съществуването на производна от първи ред на функция на комплексна променлива във всяка точка от някаква област произтича съществуването на производна от произволен ред на функцията в тази област и, следователно, непрекъснатостта на всички производни; в частност произтича и непрекъснатостта на производната $f'(z)$, и на самата функция $f(z)$.

Производните от произволен ред на функцията $f(z)$, аналитична в някаква област D, също са аналитични в тази област.

Този факт рязко отличава функциите на реална променлива от функциите на комплексна променлива. Например реалната функция на реалната променлива x

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

има производна за всяко x:

ако $x\neq 0$, то

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

а ако $x=0$, то

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0.$$

В същото време $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ не съществува, т.е. производната $f'(x)$ не е непрекъсната в точката $x=0$.

И така, за функциите на реална променлива от съществуването на производна във всяка точка на оста Ox не следва непрекъснатостта на нейната производна.

Следствие. Реалната и имагинерната части на аналитичната функция имат непрекъснати производни от произволен ред.

Съгласно доказаната теорема 6, аналитичната функция има непрекъснати производни от произволен ред. Освен това, ако производната от първи ред съществува, тя се пресмята по формулата

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Оттук следва съществуването на частните производни $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (аналогично на v). Непрекъснатостта им следва от непрекъснатостта на $f''(z)$. Аналогично се доказва съществуването и непрекъснатостта на частните производни от трети и по-висок ред.

Формула (8) за производните на аналитичната функция $f(z)$ позволява да се направи оценка на тези производни. Нека $f(z)$ е аналитична в затворения кръг $|\zeta - z| \le R$. Да означим $|f(z)| = M$. Максимумът M се достига от функцията $f(z)$ на контура L на този кръг, т.е. на окръжността $L \equiv |\zeta - z| = R$ (теорема 5). Използвайки неравенството на Дарбу (свойство 4, § 9) за окръжността L, получаваме:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta\right| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{M\,n!}{R^n}.$$

В частност

(13) $$\left|f'(z)\right| \le \frac{M}{R}.$$

От неравенство (13) следва и теоремата :

Теорема 7. (**Лиувил**)[51] Ако функцията $f(z)$ е аналитична и ограничена върху цялата комплексна равнина, то тя е постоянна (константа).

Наистина, ако $\left|f(z)\right| < M$ в цялата комплексна равнина Z (не разширената), то при $R \to \infty$ от неравенство (13) получаваме, че $\left|f'(z)\right| = 0$ и следователно $f'(z) = 0$. Но тогава $f(z) = C$, където $C \in \mathbb{C}$ е константа.

Получените в теоремите 1 и 6 формули (1) и (8) ще използваме за пресмятане на интеграли от функция на комплексна променлива по затворена крива, описана еднократно в положителна посока. За тази цел формули (1) и (8) ще запишем във вида

(1*) $$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

(8*) $$\oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n = 1,2,\ldots.$$

Като илюстрация на теоремата на Лиувил ще приведем доказателството на основната теорема на висшата алгебра:

---

[51] J. Liouville (24.03.1809-08.09.1882) - френски математик.

Теорема 8. (*Основна теорема на висшата алгебра*) Всеки полином

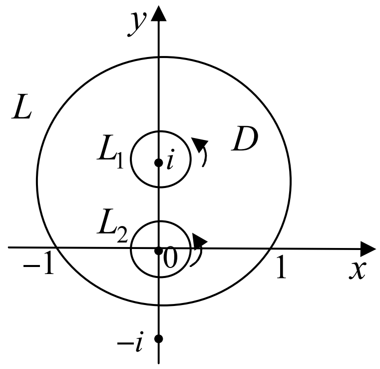
$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ...$$

$(n \geq 1,\ c_n \neq 0)$ има поне една нула.

Доказателство: Ще докажем теоремата, допускайки противното. Нека $P(z)$ няма нито една нула. Тогава $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ е цяла функция, удовлетворяваща условието $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$. Такава функция е ограничена по модул в цялата комплексна равнина (наистина съществува константа $R > 0$, такава че $|f(z)| < 1$ при $|z| > R$; ако $\max\limits_{|z| \leq R} |f(z)| = M$, то $|f(z)| < M + 1$ за всяко z). Следователно $f(z) \equiv const = 0$, което противоречи на дефиницията на тази функция.

Пример 2. Пресметнете $\oint\limits_L \dfrac{\sin z}{z^2\left(z^2+1\right)} dz$, където $L \equiv |z - i| = \sqrt{2}$.

Решение: Точките, в които подинтегралната функция не е дефинирана, следователно не е и аналитична, са $z_{1,2} = 0$, $z_3 = i$ и $z_4 = -i$. Вътре в областта D, заградена от окръжността L (черт. 2.58), влизат $z_{1,2} = 0$ и $z_3 = i$. Точка $z_4 = -i$ лежи извън затворената област $\overline{D} = D \bigcup L$ и не влияе на стойността на интеграла.



Черт. 2.58

Заграждаме точките $z=i$ и $z=0$ съответно със затворените криви L_1 и L_2 (напр. окръжности с център в съответната точка и достатъчно малки радиуси). По този начин получаваме многосвързана област. Прилагаме теоремата на Коши за многосвързана област:

$$\oint_L \frac{\sin z}{z^2\left(z^2+1\right)}dz = \oint_{L_1} \frac{\sin z}{z^2\left(z^2+1\right)}dz + \oint_{L_2} \frac{\sin z}{z^2\left(z^2+1\right)}dz = I_1 + I_2 .$$

Подготвяме интеграла I_1 за прилагане на формула (1*), след което я прилагаме. Получаваме :

$$I_1 = \oint_{L_1} \frac{\dfrac{\sin z}{z^2(z+i)}}{z-i}dz = 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z^2(z+i)}\right|_{z=i} = 2\pi i \frac{\sin i}{-2i} = -\pi i \operatorname{sh}1 .$$

Аналогично постъпваме с интеграла I_2, но прилагаме формула (8*):

$$I_2 = \oint_{L_1} \frac{\dfrac{\sin z}{z^2+1}}{z^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}\left.\left(\frac{\sin z}{z^2+1}\right)'\right|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{\left(z^2+1\right)\cos z - 2z\sin z}{\left(z^2+1\right)^2}\right|_{z=0} = 2\pi i .$$

Следователно

$$\oint_L \frac{\sin z}{z^2\left(z^2+1\right)}dz = -\pi i\,\mathrm{sh}1 + 2\pi i = \pi i\left(2-\mathrm{sh}1\right).$$

Дефиницията на интеграл от функция на комплексна променлива и теоремата на Коши за едносвързана област са публикувани от Коши в статията "За определените интеграли, взети между имагинерни граници" (1825 г.). Интегралната формула (1) Коши публикува през 1831 г., но само за частния случай, когато контура L е окръжност. Съвременният вид на тази теорема за произволен контур принадлежи на ученика на Коши - Пюизо[52] и е бил даден от него през 1850 г.

Обаче до работите на френския математик Гурсà се е смятало, че теоремата на Коши за едносвързана област, а заедно с това и интегралната формула (1), са в сила не за всички аналитични функции, а само за тези, за които съществува крайна производна не само във всяка точка на областта, но и че производната е непрекъсната в тази област. Давайки ново доказателство на теоремата на Коши за едносвързана област, Гурсà показва, че това допълнително изискване за непрекъснатост на производната е излишно. Достатъчно е само да се предположи съществуване на производната, а непрекъснатостта следва от самия факт на нейното съществуване.

По-нататъшните обобщения на теоремата на Коши за едносвързана област и интегралната формула на Коши (1) са получени през 20 век в трудовете на математиците Прингсхайм, Н. Лузин[53], И.Привалов[54] и др. Показано е, че не е задължително кривата на интегриране да бъде по части гладка - достатъчно е тя да бъде ректифицируема. Показано е също така, че не е задължително функцията $f\left(z\right)$ да е аналитична в областта G, включваща в себе

[52] V. A. Puiseux (16.04.1820-09.09.1883) - френски математик и астроном.
[53] Н. Н. Лузин (09.12.1883-28.02.1950) - руски математик.
[54] И.И.Привалов (11.02.1891-13.07.1941) - руски математик.

си областта D и нейния контур L - достатъчно е тя да е аналитична вътре в D и, когато аргументът ѝ клони към контурните точки, да има гранични стойности (не се изключва и безкрайност), образуващи интегруема по контура L функция.

Задачи

Пресметнете интегралите:

1) $\oint\limits_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)^3}dz$ **отг.** $-\dfrac{\pi}{4}\left(1+i\right)$

2) $\oint\limits_{L} \dfrac{dz}{\left(z^2+4\right)\left(z^2+1\right)^2}$, $L \equiv x^2+y^2+4y=0$ **отг.** $-\dfrac{\pi}{9}$

3) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z+1}{z\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)}dz$ **отг.** $-\dfrac{2}{3}\pi i$

4) $\oint\limits_{L} \dfrac{\sin z}{z^2+1}dz$, $L \equiv x^2+y^2+6y=0$ **отг.** $\pi i \operatorname{sh}1$

5) $\oint\limits_{|z-1-i|=1} \dfrac{\sin\pi\left(z-1\right)}{z^2-2z+2}dz$ **отг.** $\pi i \operatorname{sh}\pi$

6) $\oint\limits_{L} \dfrac{\operatorname{ch}z}{\left(z+1\right)^3\left(z-1\right)}dz$:

а) $L \equiv |z-i|+|z+i|=4$; **отг.** $-\dfrac{\pi i}{2}e^{-1}$

б) $L \equiv |z+1-i| = \sqrt{2}$ **отг.** $-\dfrac{\pi i}{4}(3\operatorname{ch}1 - 2\operatorname{sh}1)$

7) $\displaystyle\oint_L \frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi i z}{3}}{(z-3)^2(z-5)}dz$, $L \equiv |z-2| = 2$ **отг.** $-\dfrac{\pi^2}{3}$

8) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\left(z\sin z - \frac{e^z}{z^4}\right)dz$ **отг.** $-\dfrac{\pi i}{3}$

9) $\displaystyle\oint_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$ **отг.** $2\left(1-e^{-1}\right)\pi i$

10) $\displaystyle\oint_L \frac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$, $L \equiv x^2+y^2 = 2x+2y$ **отг.** $-\dfrac{\pi i}{2}$

11) $\displaystyle\oint_L \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^3}dz$, $L \equiv x^2+4y^2 = 4$ **отг.** $\dfrac{3\pi^2}{4}i$

12) $\displaystyle\oint_L \frac{dz}{z^4+1}$, $L \equiv x^2+y^2 = 2x$ **отг.** $-\dfrac{\sqrt{2}\,\pi i}{2}$

13) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1}\frac{\sin\dfrac{\pi i z}{2}}{z^2+1}dz$ **отг.** $-\pi$

14) $\displaystyle\oint_{|z-2|=3}\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz$ **отг.** $\pi i(2e-5)$

15) $\oint\limits_L \frac{z^2}{z^2+4}dz$:

а) $L \equiv |z|=1$; **отг.** 0

б) $L \equiv |z|=4$ **отг.** 0

16) $\oint\limits_L \frac{e^z}{z^2-4z-5}dz$:

а) $L \equiv |z-1|=1$; **отг.** 0

б) $L \equiv |z-1|=3$ **отг.** $-\frac{\pi i}{3}e^{-1}$

17) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{\left(z^3-z\right)\left(z-i\right)}dz$ **отг.** $\frac{\pi}{2}\left(i-1\right)\sin 1$

18) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz$ **отг.** $2\pi i$

19) $\oint\limits_L \frac{\sin z}{\left(z+1\right)^3}dz$, $L \equiv x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ (астроида) **отг.** $\pi i \sin 1$

20) $\oint\limits_L \frac{e^{\pi z}}{2z^2-i}dz$, L е границата на областта $D \equiv \begin{cases} |z|<1 \\ \operatorname{Re} z>0 \\ \operatorname{Im} z>0 \end{cases}$

отг. $\frac{\pi}{2}\left(i-1\right)e^{\frac{\pi}{2}}$

21) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z(z-2)}{z^3+1}dz$ **отг.** $2\pi i$

22) $\oint\limits_{L} \frac{e^{\pi z}}{\left(z^2+1\right)^2}dz$, $L \equiv 4x^2+y^2-2y=0$ **отг.** $\frac{\pi}{2}(\pi i-1)$

23) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z\left(z^2+4\right)}$ **отг.** $\frac{\pi i}{4}$

24) $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{2+\sin 3z}{z^2(z-\pi)}dz$ **отг.** $\frac{4i}{\pi}$

25) $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}dz$ **отг.** $-2i$

26) $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$ **отг.** $-3i$

27) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$ **отг.** 2π

28) $\oint\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)^2}dz$ **отг.** $2\pi i$

29) $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$ **отг.** i

30) $\oint\limits_{|z+\frac{3}{2}|=1} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$ **отг.** $-6i$

31) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos^2 z-1}{z^3}dz$ **отг.** $-2\pi i$

32) $\oint\limits_{|z|=\frac{4}{3}} \frac{4z^5+3z^3-7}{z^6(z-1)}dz$ **отг.** 0

33) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz-1}{z^3}dz$ **отг.** πi

34) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-\sin z}{z^2(z-\pi)}dz$ **отг.** $\frac{2i}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right)$

35) $\oint\limits_{|z+i|=3} \frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)}dz$ **отг.** $-2\pi i$

36) $\oint\limits_{|z+6|=2} \frac{2\cos\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}dz$ **отг.** πi

37) $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{1+i}}{z(z-1-i)^2}dz$ **отг.** $-\pi^2 i$

38) $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1} dz$ **отг.** $\frac{\pi i}{2} \operatorname{ch} 1$

39) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3 (z-1)} dz$ **отг.** $-\frac{\pi i}{2e}$

40) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$ **отг.** 0

41) $\oint\limits_{L} \frac{z^2+1}{\left(z^2-1\right)^2} dz$, L е контурът на квадратната област с върхове: $A(2,-1);\ B(2,1);\ C(0,1);\ D(0,-1)$. **отг.** 0

42) $\oint\limits_{|z-2|=2} \left[\frac{z}{z^4-1} + \frac{z \sin(z-3)}{(z-3)^3} \right] dz$ **отг.** $\frac{5\pi i}{2}$

43) $\oint\limits_{L} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$, L е произволна затворена крива, която не минава през точките $z=0$ и $z=1$.

отг. а) $I=0$, ако двете точки са извън кривата L;

б) $I=2\pi i$, ако $z=0$ е вътре в L, а $z=1$ - вън ;

в) $I=-\pi e i$, ако $z=1$ е вътре в L, а $z=0$ - вън ;

г) $I=(2-e)\pi i$, ако и двете точки са вътре в кривата L.

44) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{2z+1}{z(z-1)^2}dz$ **отг.** 0

45) $\oint\limits_{|z+1-i|=2} \frac{1}{z(z+1)^3}dz$ **отг.** 0

46) $\oint\limits_{|z|=3} \left[\frac{\sin 2z}{z^2(z-i)} + e^{z^2}\right]dz$ **отг.** $2\pi(\operatorname{sh}2-2)$

47) $\oint\limits_{|z+7i|=2} \left[\frac{\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}} - i} - 8\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right]dz$ **отг.** 0

48) $\oint\limits_{|z+2|=2} \left[ze^{\operatorname{ch} z} - 2\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)}\right]dz$ **отг**. $-\pi i$

49) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2\left(z^2+2z-3\right)}dz$ **отг**. $\frac{\pi i}{6}(3\sin 1 - 4)$

50) $\oint\limits_{|z-1-i|=2} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi iz}{1+i}}{z\left(z-1-i\right)^2}dz$ **отг**. $-\pi^2 i$

§11. Ред на Тейлор[55]. Ред на Лоран[56]. Нули и изолирани особени точки

В § 7 беше казано, че всяка функция, която е представена със степенен ред с радиус на сходимост $R > 0$, е не само аналитична в кръга на сходимост $|z| < R$, но и притежава производни от произволен ред, които също са аналитични в този кръг на сходимост. Обратното на това твърдение се дава от следната теорема:

Теорема 1. (Тейлор) Аналитичната функция $f(z)$ може да се развие в ред на Тейлор

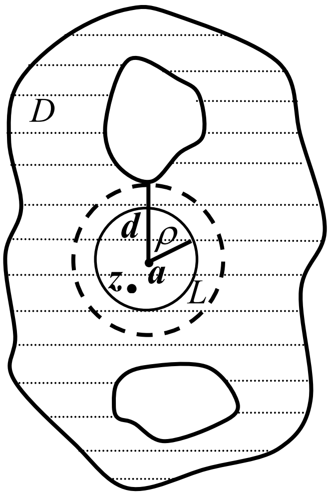
(1) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) +$$
$$+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

във всяка вътрешна точка на областта си на аналитичност D. Радиусът на сходимост на реда (1) е не по-малък от най-късото разстояние d от точката a до контура на D. Разложението (1) е единствено.

Доказателство: Нека функцията $f(z)$ е аналитична в областта D и точка a е произволна вътрешна точка от тази област. Означаваме с d най-късото разстояние от a до контура на областта D. Прекарваме окръжност с радиус d и център точката a и вътре в тази окръжност вземаме произволна точка z. След като z е взета, описваме около точката a втора окръжност $L \equiv |\zeta - a| = \rho$,

[55] B. Taylor (18.08.1685-29.12.1731) – английски математик и философ.
[56] P. A. Laurent (1813-1854) – френски математик, по професия военен инженер.

радиусът ρ на която е по-малък от d $(\rho < d)$, но е такъв, че z да лежи вътре в L (черт. 2.59). Тъй като по условие функцията $f(z)$ е аналитична в областта D, съдържаща вътре в себе си L, то съгласно интегралната формула на Коши ((1), § 10)



Черт. 2.59

(2) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Преобразуваме дробта $\dfrac{1}{\zeta - z}$ в подинтигралния израз така:

(3) $$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n .$$

В (3) е използван геометричен ред с частно $q = \dfrac{z-a}{\zeta - a}$. Тъй като $|z-a| < |\zeta - a|$, понеже ζ се движи по окръжността L с радиус ρ, а z лежи вътре в L, т.е. $|\zeta - a| = \rho$, но $|z-a| < \rho$, то $|q| < 1$ и полученият в (3) геометричен ред е сходящ. Умножаваме двете части на равенство (3) с $\dfrac{1}{2\pi i}f(\zeta)$. Получаваме

(4) $$\frac{1}{2\pi i}.\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}(z-a)^n .$$

Интегрираме равенство (4) по окръжността L. За да е възможно интегрирането на реда в дясната страна на (4), трябва да се изпълняват условията на теорема 2, § 9. Тъй като по условие функцията $f(z)$ е аналитична в областта D, то $f(z)$ е непрекъсната в D и, в частност, върху кривата L, по която ще се интегрира редът в равенството (4). Освен това $\zeta - a \neq 0$ за точките $\zeta \in L$. Следователно функциите $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$ $(n = 0,1,2,...)$ са аналитични върху L, а оттук и непрекъснати. Остава да покажем, че редът в (4) е равномерно сходящ върху L.

Ще означим с $M = \max\limits_{\zeta \in L}\left|f(\zeta)\right|$. Видяхме по-горе, че когато $\zeta \in L$, то $|q| = \left|\dfrac{z-a}{\zeta - a}\right| < 1$. Следователно

$$\left|\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}\right| \leq M\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right|^n \frac{1}{|\zeta - a|} \leq \frac{M}{\rho}|q|^n.$$

Но числовият ред с общ член $\dfrac{M}{\rho}q^n$ при $|q|<1$ е сходящ. Оттук по критерия на Вайерщрас заключаваме, че редът в (4) е равномерно (и абсолютно) сходящ върху окръжността L и може да се интегрира почленно. Извършвайки интегрирането по L на лявата и дясната страна в равенство (4), получаваме:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \oint\limits_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta .$$

Оттук въз основа на равенство (2) и известното равенство (8), § 10, а именно, че

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta ,$$

получаваме: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$, т.е. равенство (1) е доказано.

Тъй като точката z е взета произволно в кръга $|z-a|<d$, то редът (1) е сходящ за всички точки на този кръг. Следователно радиусът му на сходимост R е не по-малък от d, т.е. $R \ge d$.

Остава да докажем, че разложението (1) е единствено.

Допускаме, че функцията $f(z)$ има и друго разложение в степенен ред:

(5) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

Заместваме $z=a$ в равенство (5). Получаваме, че $f(a)=c_0$. Диференцираме равенство (5) един път (диференцирането е законно, тъй като вътре в кръга на сходимост степенните редове могат да се диференцират почленно – забележка 2, § 7), след което заместваме z с a. Имаме

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-a)^{n-1} \text{ и } f'(a)=1.c_1\text{, т.е. } c_1=\frac{f'(a)}{1!}.$$

И въобще, ако диференцираме n пъти $(n=1,\ 2,\ldots)$ двете страни на равенство (5) и след това заместим $z=a$, получаваме $f^{(n)}(a)=c_n n!$, т.е. $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, което доказва единствеността на разложение (1).

Теоремата е доказана.

Ще отбележим, че теоремата разкрива още едно различие на диференцируемите функции на комплексна променлива от диференцируемите функции на реална променлива. А именно: съгласно нея, ако функцията във всяка точка на някаква област има производна от първи ред, то във всяка точка на тази област тя може да бъде разложена в ред на Тейлор.

Дефиниция 1. Точка $z = a \in D$ се нарича *нула* на аналитичната в областта D функция $f(z)$, ако $f(a) = 0$.

Теорема 2. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в точката $z = a$ и не е тъждествено равна на нула в някаква околност на тази точка. Тогава, ако точка a е нула на функцията $f(z)$, то съществува околност на тази точка, в която функцията $f(z)$ няма други нули освен a, т.е. a е изолирана нула на тази функция.

Доказателство: Тъй като $f(a) = 0$, то развитието на функцията $f(z)$ в ред на Тейлор в достатъчно малка околност на точката $z = a$ е следното:

(6) $$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots,$$

където $c_0 = f(a) = 0$, а $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n = 1,2,\ldots)$.

Очевидно е, че не всички коефициенти c_n $(n = 1,2,\ldots)$ на това разложение могат да бъдат равни на нула, тъй като ако всички $c_n = 0$ $(n = 1,2,\ldots)$, то в някаква околност на точката a функцията $f(z) \equiv 0$, което противоречи на условието на теоремата. Следователно сред коефициентите c_n $(n = 1,2,\ldots)$ има и различни от нула. Нека m $(m \geq 1)$ е номерът на първия различен от нула коефициент. Тогава разложението (6) добива вида

(7) $$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots,$$

където $c_m \neq 0$.

Числото m се нарича *кратност* на нулата $z = a$ на аналитичната функция $f(z)$. Ако $m = 1$, то a се нарича *проста* (*еднократна*) *нула* на функцията $f(z)$, а при $m > 1$ $(m = 2,3,\ldots)$ - m*-кратна нула* на $f(z)$.

От равенство (7) следва, че в някаква околност на нулата $z=a$ от кратност m $(m \geq 1)$ аналитичната функция $f(z)$ има следния вид:

(8) $$f(z)=(z-a)^m \varphi(z),$$

където

(9) $$\varphi(z)=c_m+c_{m+1}(z-a)+c_{m+2}(z-a)^2+\ldots;\ c_m \neq 0.$$

Тъй като функцията $\varphi(z)$, определена от (9), е аналитична (теорема 6, § 7) и следователно непрекъсната в някаква околност на точката a, то $\lim\limits_{z \to a} \varphi(z)=\varphi(a)=c_m \neq 0$.

Тогава от непрекъснатостта на $\varphi(z)$ в точка a следва, че около a може да се опише околност, в която $\varphi(z) \neq 0$. По такъв начин в тази околност на a аналитичната функция $f(z)$ удовлетворява условията на теоремата и има вида (8), където $\varphi(z) \neq 0$ в околността на a, т.е. $\varphi(z)$ няма нули в тази околност, а оттук и $f(z)$ няма други нули в нея, освен $z=a$.

С това теоремата е доказана.

От равенство (8) става ясно, че ако $z=a$ е m-кратна $(m \geq 1)$ нула на функцията $f(z)$, то

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0, \text{ но } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Обратното също е вярно:

Ако $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0$, но $f^{(m)}(a) \neq 0$, то $z=a$ е m-кратна нула на функцията $f(z)$.

Забележка. Ако са известни особените точки на функцията $f(z)$, то радиусът на сходимост на нейното разложение (1) по степените на $z-a$ може да се намери по следния начин: особените точки на функцията са контурни за областта на нейната аналитичност. Затова съгласно теорема 1 радиусът на сходимост на реда на Тейлор е не по-малък, отколкото разстоянието от точка a до най-близката особена точка на функцията. Но радиусът на сходимост не може да бъде и по-голям от това разстояние, тъй като в противен случай особената точка би попаднала вътре в кръга на сходимост, а според теорема 6, § 7, сумата на степенния ред е аналитична функция в целия кръг на сходимост. Затова в него не може да има особени точки на функцията. И така доказахме следната теорема:

Теорема 3. Радиусът на сходимост на разложението (1) на функцията $f(z)$ в ред на Тейлор по степените на $z-a$ е равен на най-късото разстояние от точката a до най-близката особена точка на тази функция.

Пример 1. Намерете няколко члена от разложението в ред по степените на z на функцията $f(z)=\operatorname{tg} z$ и определете радиуса на сходимост на реда.

Решение: Ще използваме формула (1), в която $a=0$. Намираме няколко производни на $f(z)=\operatorname{tg} z$; $f(0)=0$:

$$f'(z)=\frac{1}{\cos^2 z}=1+\operatorname{tg}^2 z,\ f'(0)=1;$$

$$f''(z)=2\operatorname{tg} z\frac{1}{\cos^2 z}=2\operatorname{tg} z\left(1+tg^2 z\right)=2(\operatorname{tg} z+\operatorname{tg}^3 z),$$

$$f''(0)=0;$$

$$f'''(z)=2\left(\frac{1}{\cos^2 z}+3\operatorname{tg}^2 z\frac{1}{\cos^2 z}\right)=2\left(1+\operatorname{tg}^2 z\right)\left(1+3\operatorname{tg}^2 z\right),$$

$$f'''(0)=2;$$

$$f^{IV}(z)=2\left[2\operatorname{tg} z\frac{1}{\cos^2 z}\left(1+3\operatorname{tg}^2 z\right)+6\operatorname{tg} z\frac{1}{\cos^2 z}(1+\operatorname{tg}^2 z)\right]=$$

$$=4\operatorname{tg} z\frac{1}{\cos^2 z}(4+6\operatorname{tg}^2 z)=8\operatorname{tg} z\left(1+\operatorname{tg}^2 z\right)\left(2+3\operatorname{tg}^2 z\right),$$

$$f^{IV}(0)=0$$

и т.н.

Следователно $\operatorname{tg} z=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots$.

Особените точки на $f(z)=\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$ са корени на уравнението $\cos z=0$, а именно: $z=\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Най-близките особени точки до точката $z=0$ са $z=\pm\frac{\pi}{2}$ и разстоянието от $z=0$ до тях е $\frac{\pi}{2}$. Следователно радиусът на сходимост на получения ред на Тейлор за $f(z)=\operatorname{tg} z$ е $R=\frac{\pi}{2}$.

В ред на Тейлор се разлагат функции, аналитични в кръгови области. Обаче често се налага да се разглеждат функции, аналитични навсякъде в някаква околност на точката a, изключвайки самата точка a, т.е. аналитични във венец от вида $0<|z-a|<R$. Такива функции се развиват в редове, съдържащи както целите положителни, така и целите отрицателни степени на $z-a$, т.е. от вида:

(10) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\left(z-a\right)^{-n}.$$

Първият ред отдясно е обикновен степенен ред, сходящ в някакъв кръг $|z-a|<R$. Със субституцията $\dfrac{1}{z-a}=\zeta$ вторият ред се преобразува в степенен ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}$, сходящ в някакъв кръг $|\zeta|<R_1$. Тогава вторият ред в (10) ще е сходящ в областта $|z-a|>\dfrac{1}{R_1}=r$ и, ако $r<R$, то общата област на сходимост на двата реда в (10) ще бъде венецът $r<|z-a|<R$.

Тъй като редът в лявата страна на равенство (10) се записва като сума на степенен ред и на ред, който се свежда до степенен, то, използвайки теоремите на Абел (теорема 9, § 5) и Вайерщрас (теорема 6, § 5), лесно се установява, че този ред е абсолютно и равномерно сходящ във всяка затворена област вътре във венеца $r<|z-a|<R$ и че неговата сума в споменатата област е аналитичната функция $f(z)$:

(11) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-a\right)^n .$$

Тъй като върху всяка окръжност $L\equiv|z-a|=\rho$ $\left(r<\rho<R\right)$ редът (11) е равномерно сходящ и неговата равномерна сходимост не се нарушава след умножаването му с $\left(z-a\right)^{-n-1}$ ($n=0,\pm1,\ldots$) (този множител е ограничен върху L), (теорема 4, § 5), то, интегрирайки почленно разложението

$$\frac{f(z)}{\left(z-a\right)^{n+1}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\left(z-a\right)^{k-n-1}$$

по окръжността L и използвайки пример 2, § 9, намираме коефициентите

(12) $$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \ (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Редът (11), коефициентите на който се определят с формула (12), се нарича *ред на Лоран* на функцията $f(z)$ в околността на точката a. По такъв начин сумата $f(z)$ на реда (11) е аналитична функция във венеца на неговата сходимост; при това този ред е ред на Лоран на своята сума $f(z)$.

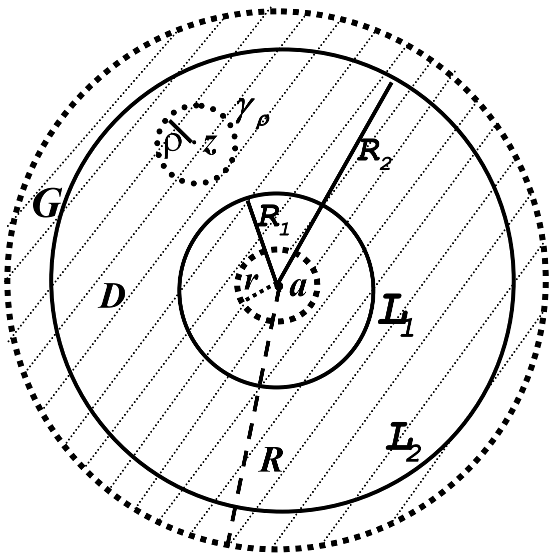
Пита се сега – всяка ли функция $f(z)$, аналитична в произволен кръгов венец, може да се развие в ред на Лоран в този венец? Отговор на този въпрос дава следната теорема:

Теорема 4.[57] **(Лоран)** Всяка функция $f(z)$, аналитична в кръговия венец $G \equiv r < |z-a| < R$, може да се развие в този венец в ред на Лоран (11), коефициентите на който се пресмятат по формула (12), където кривата на интегриране L е произволна затворена крива, лежаща вътре в G и описана един път в положителна посока около точката a. (В частност L е окръжност с радиус R^*, $r < R^* < R$) Разложението (11) - (12) е единствено.

Доказателство: Вътре във венеца $G \equiv r < |z-a| < R$ вземаме произволна точка z и прекарваме две концентрични окръжности $L_1 \equiv |\zeta - a| = R_1$ и $L_2 \equiv |\zeta - a| = R_2$, $r < R_1 < R_2 < R$, така, че точка z да лежи между тях.

Нека $\gamma_\rho \equiv |\zeta - z| = \rho$ е окръжност с център в точката z, която лежи вътре във венеца, образуван от окръжностите L_1 и L_2 (черт. 2.60).

[57] Теорема 4 е била публикувана през 1843 г. от ученика на Коши френския военен инженер П. А. Лоран.



Черт. 2.60

Тъй като

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

е аналитична функция в многосвързаната област D, заградена от окръжностите L_1, L_2 и γ_ρ, включително и върху самите окръжности (γ_ρ изключва точката $\zeta = z$), то по основната теорема на Коши за многосвързана област (теорема 4, § 9) имаме

(13) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\,,$$

където интегрирането се извършва в положителна посока. Но последният интеграл в равенство (13) е интегралът на Коши (§ 10) и е равен на $f(z)$. Следователно

(14) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\,.$$

Повтаряйки дословно всички разсъждения и изчисления, направени в доказателството на теорема 1, разлагаме първия от интегралите в (14) в степенен ред

(15) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z - a\right)^n,$$

където

(16) $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0,1,2,\ldots.).$$

Единствената разлика е, че сега интегралът в (16) не можем да заместим по формула (8), § 10, с $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, тъй като $f(z)$, най-общо казано, не е аналитична в точката a. За втория интеграл в (14) имаме

(17) $$-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_1} \frac{f(\zeta)}{(z-a)-(\zeta - a)} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-a} \oint\limits_{L_1} \frac{f(\zeta)}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}} d\zeta \ .$$

Тъй като точка ζ лежи на L_1, то $|\zeta - a| = R_1$, като в същото време за точка z, външна за кръга $|\zeta - a| \le R_1$, имаме $|z - a| > R_1$. Тогава $\left|\dfrac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1$, откъдето следва, че геометричният ред $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{\zeta - a}{z - a}\right)^n$ е равномерно сходящ върху L_1.

Замествайки това разложение в (17) и интегрирайки почленно, намираме

(18) $$-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} . \frac{1}{z-a} \oint\limits_{L_1} f(\zeta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^n\right] d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint\limits_{L_1} f(\zeta) \frac{(\zeta - a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(z-a\right)^{n}}\oint_{L_1} f(\zeta)\left(\zeta-a\right)^{n-1}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\left(z-a\right)^{n}} ,$$

където

(19) $$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)}{\left(\zeta-a\right)^{-n+1}}d\zeta \quad (n=1,2,...).$$

Замествайки разложения (15) и (18) във формула (14), получаваме

(20) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\left(z-a\right)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^{n} .$$

Подинтегралните функции в равенства (16) и (19) за коефициентите c_n и c_{-n} са аналитични вътре във венеца $G\equiv r<\left|\zeta-a\right|<R$, поради което в тези равенства вместо различните криви на интегриране L_1 и L_2 може да се вземе обща крива L (следствие 3, § 9). Обединявайки формули (16) и (19) и избирайки за крива L на интегрирането произволна окръжност, принадлежаща на разглеждания венец ($|\zeta-a|=R^*,\ r<R^*<R$), имаме

(21) $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-a\right)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,\pm1,\pm2,...).$$

И така, получихме развитието на $f\left(z\right)$ в ред на Лоран във венеца $G\equiv r<|z-a|<R$. Единствеността на полученото разложение следва от доказаното преди теорема 4 твърдение, че всеки ред (11) е ред на Лоран на своята сума, понеже от него следва, че намереното по какъвто и да е начин разложение на аналитичната във венеца G функция $f\left(z\right)$ в ред (20) е ред на Лоран.

Теоремата е доказана.

Дефиниция 2. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в някаква околност $|z-a|<\delta$ на точка a, с изключение на самата точка a (в a функцията може и да не е дефинирана). Тогава a се нарича *изолирана особена точка* на аналитичната функция $f(z)$.

Ще отбележим, че се срещат функции, които имат и неизолирани особени точки.

Пример 2. Нека $f(z)=\dfrac{1}{z\sin\frac{1}{z}}$. Тази функция не е дефинирана в точката $z=0$, както и в точките $\dfrac{1}{z}=k\pi$ или $z=\dfrac{1}{k\pi}$ ($k=\pm1,\pm2,\ldots$), които са корени на уравнението $\sin\dfrac{1}{z}=0$.

Около всяка точка $z=\dfrac{1}{k\pi}$ ($k=\pm1,\pm2,\ldots$) може да се вземе околност, която представлява отворено кръгче, радиусът на което е по-малък от половината разстояние от съответната точка до съседната ѝ по-близка до нулата точка. Тогава тази околност ще съдържа само една от особените точки $z=\dfrac{1}{k\pi}$ и следователно тези точки ще бъдат изолирани особени точки за дадената функция $f(z)$. Но това не се отнася за особената точка $z=0$. Колкото и малка околност да вземем около тази точка, то в нея ще влязат безброй много точки от редицата $\left\{\dfrac{1}{k\pi}\right\}$ ($k=\pm1,\pm2,\ldots$) от известен номер k нататък, тъй като $\lim\limits_{k\to\pm\infty}\dfrac{1}{k\pi}=0$. Следователно $z=0$ не е изолирана особена точка за функцията $f(z)$.

Ние обаче ще разглеждаме функции, които имат само изолирани особени точки. Нека такава е функцията $f(z)$, аналитична в областта $D \equiv 0 < |z-a| < \delta$. Тази област е изроден кръгов венец с вътрешен радиус $r = 0$. Прилагаме теорема 4 на Лоран за тази функция. Получаваме равенство (20), а именно

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(z-a\right)^n,$$

където

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{\left(z-a\right)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а $L \equiv |z-a| = \rho$, $0 < \rho < \delta$, се описва еднократно в положителна посока.

Дефиниция 3. Частта от разложението (20), която съдържа неотрицателните степени на $z-a$, а именно:

$$c_0 + c_1\left(z-a\right) + c_2\left(z-a\right)^2 + \ldots + c_n\left(z-a\right)^n + \ldots,$$

се нарича *регулярна част*, а частта, съдържаща отрицателните степени на $z-a$:

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{\left(z-a\right)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{\left(z-a\right)^n} + \ldots,$$

се нарича *главна част* на разложението.

Дефиниция 4. Изолираната особена точка $z = a$ на функцията $f(z)$ се нарича

а) *отстранима*, ако отсъства главната част в Лорановото развитие на тази функция в околността на точката a;

б) *полюс*, ако главната част на това развитие съдържа краен брой членове;

в) *съществена особена точка*, ако главната част съдържа безброй много членове.

Кратност на полюса се нарича числото m ($m = 1, 2, \dots$), когато $-m$ е най-малката отрицателна степен на разликата $z - a$ в главната част на Лорановото развитие на $f(z)$. При $m = 1$ (или $-m = -1$) полюсът се нарича *прост* (*еднократен полюс*).

По такъв начин:

а) В околността на отстранимата особена точка разложението има вида

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \ 0 < |z-a| < \delta.$$

То изразява функцията във всички точки на кръга $|z-a| < \delta$, освен центъра a. В центъра $z = a$ равенството не е вярно, тъй като при $z = a$ функцията $f(z)$ не е дефинирана, а дясната страна на това равенство е непрекъсната. Ако додефинираме функцията $f(z)$ в центъра a, приемайки я равна на стойността на дясната страна, т.е. $f(a) = c_0$, то проблемът ще бъде отстранен - оттук и названието "отстранима особена точка".

Пример 3. Нека $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$, $0 < |z| < \delta$. Развиваме $\cos z$ в ред на Лоран в околността на точката $z = 0$. Получаваме

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} + \dots \ (n = 1, 2, \dots).$$

Тъй като главната част в развитието на дадената функция $f(z)$ в ред на Лоран отсъства, то точката $z = 0$ е отстранима особена точка за нея. Можем да запишем

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos z}{z^2}, & z\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & z=0\end{cases}$$

и по този начин я додефинираме в точката $z=0$, т.е. така записаната функция $f(z)$ вече е непрекъсната в точката $z=0$.

Забележка. Отстранимата особена точка се нарича още и правилна (регулярна), тъй като след додефинирането на функцията в тази точка получената функция вече е аналитична (регулярна) в нея.

б) В околността на m - кратния полюс $(m\geq 1)$ разложението има вида

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots,$$

където $c_{-m}\neq 0$, а $0<|z-a|<\delta$.

В частност, в околността на простия полюс

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots,\text{ като } c_{-1}\neq 0.$$

Пример 4. Нека $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z}{z^4}$, $0<|z|<\delta$.

Разлагаме $f(z)$ в ред на Лоран в околността на точката $z=0$:

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\left[z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right]=$$

$$=z^{-3}+\frac{z^{-1}}{3!}+\frac{z}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$(n=0,1,2,\ldots)$.

В случая $m=3$ (или $-m=-3$) и следователно $z=0$ е 3-кратен полюс за функцията $f(z)$.

Ако обаче $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z}{z^2}$, то

$$f(z)=z^{-1}+\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

и $z=0$ ще бъде прост полюс, тъй като $m=1$ (или $-m=-1$).

в) В околността на съществената особена точка $z=a$ Лорановото развитие на функцията $f(z)$ има вида

$$f(z)=\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+\ldots,$$

при това регулярната част може да има и краен брой членове или изобщо да отсъства.

Пример 5. Нека $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ и $0<|z|<\delta$. Тогава

$$f(z)=z^2\left(1+\frac{\frac{1}{z}}{1!}+\frac{\frac{1}{z^2}}{2!}+\ldots+\frac{\frac{1}{z^n}}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=z^2+\frac{z}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{z^{-1}}{3!}+\ldots+\frac{z^{-n+2}}{n!}+\ldots\quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Точката $z=0$ е съществена особена точка на $f(z)$. При това регулярната част се състои само от три члена: $z^2+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{1}{2!}$.

Теорема 5. (*Връзка между нулите и полюсите*) За да бъде точката $z=a$ m-кратна нула $(m\ge 1)$ на аналитичната функция

$f(z)$, е необходимо и достатъчно тази точка да е m- кратен полюс на функцията $\dfrac{1}{f(z)}$.

Доказателство: *Необходимост*: Нека $z=a$ е m- кратна $(m \geq 1)$ нула на функцията $f(z)$. Тогава (равенство (8)) тази функция може да се запише във вида $f(z)=(z-a)^m \varphi(z)$, където $\varphi(z)$ е аналитична в точката a, при това $\varphi(a) \neq 0$. От дефиницията на функция, аналитична в точка, следва, че $\varphi(z)$ е аналитична в някаква околност $|z-a|<\delta$ на точката a, а от непрекъснатостта на $\varphi(z)$ в тази околност – че не се анулира в нито една нейна точка. В такъв случай $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ е също аналитична функция в тази околност и затова в нея функцията може да се развие в ред на Тейлор:

$$\frac{1}{\varphi(z)}=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots,$$

като $c_0=\dfrac{1}{\varphi(a)} \neq 0$.

Следователно

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{\varphi(z)}=$$

$$=\frac{1}{(z-a)^m}\left[c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots\right]=$$

$$=\frac{c_0}{(z-a)^m}+\frac{c_1}{(z-a)^{m-1}}+\frac{c_2}{(z-a)^{m-2}}+\ldots,$$

където $c_0 \neq 0$.

От полученото равенство се вижда, че точката $z=a$ е m-кратен $(m \geq 1)$ полюс за функцията $\dfrac{1}{f(z)}$.

Достатъчност: Нека сега $z=a$ е m- кратен $(m \geq 1)$ полюс на функцията $f(z)$. Тогава Лорановото развитие на $f(z)$ има вида

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots,$$

като $c_{-m} \neq 0$ и $0<|z-a|<\delta$. Следователно $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-a)^m}$, където $\psi(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\ldots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+\ldots$. Тъй като $\psi(a)=c_{-m} \neq 0$ и $\psi(z)$ е аналитична функция в кръга $|z-a|<\delta$ (като сума на степенен ред, § 5), а следователно и непрекъсната в него, то $\psi(z) \neq 0$ в някаква околност $|z-a|<\rho \leq \delta$ на точката $z=a$. Оттук следва, че $\dfrac{1}{\psi(z)}$ е също аналитична в кръга $|z-a|<\rho$ и може да бъде развита в ред на Тейлор:

$$\frac{1}{\psi(z)}=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\ldots,\ b_0=\frac{1}{\psi(a)} \neq 0.$$

Следователно

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\frac{1}{\psi(z)}=(z-a)^m\left[b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\ldots\right],$$

$b_0 \neq 0$.

От полученото равенство се вижда, че $z=a$ е m- кратна $(m \geq 1)$ нула на функцията $\dfrac{1}{f(z)}$.

Теоремата е доказана.

Теорема 6. (*За поведението на функцията в околност на отстранимата особена точка*) Необходимото и достатъчно условие изолираната особена точка $z = a$ да е отстранима особена точка на аналитичната функция $f(z)$ е функцията $f(z)$ да е ограничена в някаква околност на тази точка.

Доказателство: *Необходимост*: Нека $z = a$ е отстранима особена точка на функцията $f(z)$. Тогава по дефиниция имаме разложението

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots,\ 0 < |z-a| < \delta .$$

След граничен преход в това равенство при $z \to a$ получаваме $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0$; следователно $f(z)$ е ограничена в околността но точката $z = a$ (виж казаното след дефиниция 3, § 4).

Достатъчност: Нека $z = a$ е изолирана особена точка на функцията $f(z)$ и нека $f(z)$ е ограничена в околността $|z-a| < \rho$ на тази точка, т.е. $|f(z)| \le M$, където $M > 0$ е константа, а z принадлежи на кръговия венец $0 < |z-a| < \rho$. Развиваме аналитичната във венеца $0 < |z-a| < \rho$ функция $f(z)$ в ред на Лоран. За коефициентите на този ред с отрицателни индекси имаме по формула (21)

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots),$$

където L е окръжността $|z-a| = \delta < \rho$. Тогава $|c_{-n}| =$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \oint\limits_L \frac{|f(z)|}{|z-a|^{-n+1}} |dz| \le$$

$$\le \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{\delta^{-n+1}} 2\pi\delta = M\delta^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Считайки в това неравенство n фиксирано и използвайки граничен преход при $\delta \to 0$, получаваме $|c_{-n}| \le 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Следователно $c_{-n} = 0$ за $\forall n = 1, 2, \ldots$, т.е. всички коефициенти в главната част на Лорановото развитие са равни на нула и следователно главната част отсъства в това развитие. Тогава по дефиниция $z = a$ е отстранима особена точка на функцията $f(z)$.

Теоремата е доказана.

Нека отново разгледаме **пример 3**. Ще приложим току-що доказаната теорема, за да уточним характера на особената точка $z = 0$ на функцията $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$.

Търсим $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1 - \cos z}{z^2} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{2z} = \dfrac{1}{2}$.

Тъй като получихме крайна граница, то $z = 0$ е отстранима особена точка на тази функция.

Теорема 7. (*За поведението на функцията в околността на полюса*) Точката $z = a$ е полюс на функцията $f(z)$ тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

Доказателство: *Необходимост*: Нека $z = a$ е m- кратен $(m \ge 1)$ полюс на функцията $f(z)$. Тогава Лорановото ѝ развитие във венеца $0 < |z - a| < \rho$ има вида

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots,$$

където $c_{-m} \neq 0$.

Следователно

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

а $\varphi(z)$ е функцията:

$$\varphi(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \ldots .$$

Ясно е, че $\varphi(z)$ е аналитична функция в околността на $z=a$ (теорема 6, § 7) и $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0$.

Следователно $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m} = \infty$.

Достатъчност: Нека сега $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$. Ще докажем, че $z=a$ е полюс на $f(z)$, без да се уточнява неговата кратност.

Нека $\psi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Тогава $\lim\limits_{z \to a} \psi(z) = 0$, т.е. $\psi(z)$ е ограничена в околността на точката $z=a$. Тогава по теорема 6 точката $z=a$ е отстранима особена точка на $\psi(z)$ и

$$\psi(z) = \frac{1}{f(z)} = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots .$$

Тъй като $\psi(z) \to 0$ при $z \to a$, то $b_0 = 0$. Тогава

$$\frac{1}{f(z)} = b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots = (z-a)\left[b_1 + b_2(z-a) + \ldots\right]$$

и $z=a$ е нула на функцията $\dfrac{1}{f(z)}$ (ако $b_1 \neq 0$, то $z=a$ е проста нула, но ако $b_1 = b_2 = \ldots = b_{m-1} = 0$, а $b_m \neq 0$, то $z=a$ ще бъде m - кратна нула).

Следователно от теорема 4 се получава, че $z=a$ е полюс (прост или m - кратен) на функцията $f(z)$.

Теоремата е доказана.

Ще приложим тази теорема за функцията $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z}{z^4}$ от **пример 4**. Намираме, че $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} z}{z^4}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} z}{z}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z^3}=1.\infty=\infty$, т.е. виждаме, че $z=0$ е полюс на функцията $f(z)$, но без да можем да посочим неговата кратност.

За по-бързото определяне на характера на особените точки (отстраними и полюси) на функцията в конкретните случаи е полезно да се имат предвид следните прости *твърдения*, които произтичат от доказаните по-горе теореми 6 и 7:

1^0) Ако $f(z)$ и $\varphi(z)\not\equiv 0$ са две еднозначни и аналитични в областта D функции, то функцията $F(z)=\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ може да има в областта D особени точки, а именно полюси и отстраними особени точки, само в нулите на функцията $\varphi(z)$. Нека $z=a$ е k- кратна нула на функцията $\varphi(z)$ $(k\geq 1)$ и m- кратна нула на функцията $f(z)$ $(m\geq 0)$ (в случая, когато $z=a$ не е нула на функцията $f(z)$, полагаме $m=0$). Тогава в околността на точката a имаме:

$$F(z)=\frac{\dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m+\ldots}{\dfrac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+\ldots}=(z-a)^{m-k}\frac{\dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}+\ldots}{\dfrac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}+\ldots},$$

където $f^{(m)}(a)\neq 0$ и $\varphi^{(k)}(a)\neq 0$. Оттук следва, че $F(z)$ има в точката $z=a$ полюс от кратност $k-m$, ако $k>m$, и отстранима особена точка, ако $k\leq m$.

2^0) Ако $f(z)$ и $\varphi(z)$ са две функции, нямащи в областта D други особени точки освен полюси, то тяхната сума, разлика, произведение и частно (последното се образува само в случая, когато $\varphi(z) \not\equiv 0$) също нямат други особени точки освен полюси.

3⁰) Нека $f(z)$ е еднозначна аналитична функция, която няма в областта D други особености освен полюси. Тогава и производната на тази функция $f'(z)$ не може да има в областта D други особености освен полюси. Именно, $f'(z)$ има за полюс всеки полюс на функцията $f(z)$ и при това от кратност с единица по-голяма, отколкото кратността на полюса на $f(z)$.

Наистина нека a е m- кратен полюс $(m \geq 1)$ на функцията $f(z)$. Тогава $f(z)$ има в някаква околност U на точката a, $0 < |z-a| < \rho$, развитието

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots; \ c_{-m} \neq 0.$$

Тъй като членовете на това развитие са аналитични в U и самото разложение е равномерно сходящо в околността U (от свойството на реда на Лоран), то това разложение може да се диференцира почленно в U. Получаваме

$$f'(z) = -\frac{mc_{-m}}{(z-a)^{m+1}} - \ldots - \frac{c_{-1}}{(z-a)^2} + c_1 + \ldots; \ mc_{-m} \neq 0.$$

От полученото за $f'(z)$ Лораново развитие в околността на точката $z = a$ се вижда, че a е $(m+1)$- кратен полюс на производната $f'(z)$.

4⁰) Ако $z = a$ е регулярна (правилна) точка или полюс на функцията $f(z) \not\equiv 0$, а на функцията $\varphi(z)$ е съществена особена точка, то a ще бъде съществена особена точка и на всяка от функциите $\varphi(z) \pm f(z)$, $\varphi(z).f(z)$ и $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$.

5^0) Ако $z = a$ е съществена особена точка на функцията $f(z)$, то за функцията $\dfrac{1}{f(z)}$ точката $z = a$ ще бъде или съществена особена точка, или неизолирана особена точка – гранична точка на полюсите.

Наистина има две възможности: или съществува околност на точката a, в която $f(z)$ не се анулира, или такава околност не съществува. В първия случай функцията $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ ще бъде аналитична в някаква околност на точката a, с изключение на самата точка. Тази точка не може да бъде за $\varphi(z)$ нито правилна, нито полюс; в противен случай би била полюс или правилна точка на $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$, въпреки предположението. Следователно a е съществена особена точка на функцията $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Във втория случай във всяка околност на точката $z = a$ съществуват нули на функцията $f(z)$ и следователно в нея съществуват полюси на функцията $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Оттук следва, че всяка околност на точката $z = a$ съдържа особени точки (а именно полюси) на функция $\varphi(z)$. Затова в разглеждания случай a е неизолирана особена точка на $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Това е граничната точка (границата) на полюсите.

Теорема 8. (Сохоцки[58]) (*За поведението на функцията в съществената особена точка*) Каквато и малка околност на съществената особена точка да вземем, функцията $f(z)$ в нея е неограничена и приема стойности, достатъчно малко отличаващи се от произволно зададено число. Обратно, ако в произволна, достатъчно малка околност на изолираната особена точка, функцията $f(z)$ приема стойности, които произволно малко се отличават от едно, отнапред зададено число, то тази особена точка е съществена особена.

По-кратко ще казваме, че в съществената особена точка функцията е неопределена или че не съществува $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. Обратното също е вярно, т.е. необходимото и достатъчно условие точката $z=a$ да е съществена особена точка на $f(z)$ е $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ да не съществува.

Доказателство: *Необходимост*: Нека $z=a$ е съществена особена точка на функцията $f(z)$.

Ще разделим доказателството на три части:

а) Нека вземем произволно малка околност $0<|z|<\delta$ на точката $z=a$. Ако в нея функцията $f(z)$ е ограничена, то съгласно теорема 6 точката $z=a$ би била отстранима особена точка, което противоречи на условието на теоремата (необходимостта). И така в произволно малка околност $0<|z-a|<\delta$ могат да се намерят точки $z_1, z_2,..., z_n,...$, такива че стойностите $f(z_1), f(z_2),..., f(z_n),...$ безкрайно растат при $n\to\infty$. Не е трудно да се разбере, че точките $z_1, z_2,..., z_n,...$

[58] Теорема 8. (Сохоцки-Казорати-Вайерщрас) Тази теорема се приписва на Вайерщрас, който я е публикувал през 1876 г. Но тя е била доказана от Сохоцки още през 1868 г.

Ю. В. Сохоцкий (05.02.1842-14.12.1927) – руски математик.
F. Casorati (17.12.1835-11.09.1890) – италиански математик.

трябва да клонят към съществената особена точка a, тъй като във всеки венец $\delta' < |z-a| < \delta$, колкото и малко да е δ', функцията $f(z)$ е аналитична, а затова и ограничена.

б) Да вземем сега произволно комплексно число c и да разгледаме уравнението $f(z)=c$. Да предположим, че то има корени $z=u_1, z=u_2,..., z=u_n,...$, клонящи към точката a. В този случай каквато и малка околност $0<|z-a|<\delta$ да вземем, в нея ще попаднат, започвайки от някой номер k, корените $z=u_k$ и стойностите на функцията в тези корени ще бъдат равни точно на c: $f\left(u_k\right)=c$. Значи в разглеждания случай в произволна околност $0<|z-a|<\delta$ функцията ще приема стойности не само достатъчно близки до числото c, но даже равни точно на c.

в) Ако пък уравнението $f(z)=c$ няма корени, клонящи към точката a, то около a може да се опише такъв кръг $|z-a|<\rho$, в който да няма нито един корен. В този случай ще разгледаме функцията $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-c}$. Знаменателят $f(z)-c$ е аналитична функция в двусвързаната област $0<|z-a|<\rho$ и не е равен на нула в нито една нейна точка; следователно $\varphi(z)$ е аналитична функция в тази област и затова $z=a$ е изолирана особена точка на функцията $\varphi(z)$. Такава точка, както знаем, може да бъде три типа: отстранима особена точка, полюс или съществена особена точка. Съгласно теореми 6 и 7 в първите два случая би съществувала границата $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=l$ - крайна или безкрайна. Но от $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-c}$ следва, че $f(z)=c+\dfrac{1}{\varphi(z)}$. Следователно съществува границата $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=c+\frac{1}{l}$ също крайна или безкрайна. Според същите теореми 6 и 7 оттук би следвало, че $z=a$ е отстранима особена точка или полюс на функцията $f(z)$, което противоречи на условието, че $z=a$ е съществена особена точка. Следователно $z=a$ не може да бъде нито отстранима особена точка, нито полюс на функцията $\varphi(z)$; остава само едно - $z=a$ да е съществена особена точка на $\varphi(z)$. Но в такъв случай съгласно пункт а) може да се вземе редица от точки $z_1, z_2, \ldots$, стремяща се към точката $z=a$, в които стойностите на функцията $\varphi(z_1), \varphi(z_2), \ldots$ растат безкрайно: $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(z_n)=\infty$. Оттук $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[c+\frac{1}{\varphi(z_n)}\right]=c$, т.е. стойностите $f(z_n)$ клонят към числото c и затова се отличават произволно малко от него.

Достатъчност: Ако независимо от условието на втората част на теоремата допуснем, че точката a е отстранима особена точка или полюс на функцията $f(z)$, то границата на тази функция при $z\to a$ би била или крайното число l, или ∞. Следователно функцията не би могла да приема стойности, които произволно малко се отличават от едно предварително зададено число.

Теоремата е доказана.

Примери: 6) Нека $f(z)=\sin\frac{1}{z}$. Съществена особена точка на тази функция е $z=0$. Наистина при $z\to 0$ функцията $\sin\frac{1}{z}$ не клони към никаква граница – нито крайна, нито безкрайна, което веднага се вижда, ако се разгледат само реалните стойности на z.

Ако сега $c=\infty$, то, полагайки напр. $z_n=\frac{i}{n}$ и следователно $\frac{1}{z_n}=-ni$, получаваме, че $\sin\frac{1}{z_n}=-i\operatorname{sh} n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Нека сега $c\neq\infty$. За да получим редицата $\{z_n\}$, за която се говори в теоремата на Сохоцки, ще решим уравнението $\sin\frac{1}{z}=c$. Получаваме $\frac{1}{z}=\operatorname{Arcsin} c=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(ic+\sqrt{1-c^2}\right)$, откъдето

$$z=\frac{i}{\operatorname{Ln}\left(ic+\sqrt{1-c^2}\right)}=\frac{i}{\ln\left(ic+\sqrt{1-c^2}\right)+2n\pi i} \quad (n=0,\pm 1,\ldots).$$

Полагайки $z_n=\frac{i}{\ln\left(ic+\sqrt{1-c^2}\right)+2n\pi i}$ и давайки на n стойности $1,2,\ldots$, получаваме редицата $\{z_n\}$, клоняща към нула, за която $f\left(z_n\right)=c$ $(n=1,2,\ldots)$; следователно $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(z_n\right)=c$.

7) Нека $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. Тук $z=0$ е съществена особена точка, тъй като отново не съществува $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$.

Полагайки $c=\infty$, вземаме $z_n=\frac{1}{n}$. Получаваме $f\left(z_n\right)=e^n\to\infty$ при $n\to\infty$, т.е. редицата $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ отговаря на твърдението на теоремата на Сохоцки при $c=\infty$. Нека сега $c=0$.

Тогава, полагайки $z_n = -\dfrac{1}{n}$, ще имаме $f\left(z_n\right) = e^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$; т.е. твърдението на теоремата е проверено и в този случай.

Нека, накрая, $c \neq 0$ и $c \neq \infty$. Тук е по-просто да се подберат точките z_n, решавайки уравнението $e^{\frac{1}{z}} = c$. Получаваме $\dfrac{1}{z} = \operatorname{Ln} c$ или $z = \dfrac{1}{\operatorname{Ln} c} = \dfrac{1}{\ln c + 2k\pi i}$ $(k = 0, \pm 1, ...)$. Полагайки $z_n = \dfrac{1}{\ln c + 2n\pi i}$ $(n = 0, \pm 1, ...)$, ще получим редица $\{z_n\}$, клоняща към нула и удовлетворяваща условието $f\left(z_n\right) = c$; следователно $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(z_n\right) = c$.

Да се върнем на разгледания по-рано **пример 5**, т.е. да изследваме функцията $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в точката $z = 0$. Нека първо пресметнем границата на тази функция, когато $z \to 0$, но по реалната ос (положителната и отрицателната полуоси):

$$\lim_{z\to 0} z^2 e^{\frac{1}{z}} = \lim_{\substack{x\to +0\\ (y=0)}} \left(x + iy\right)^2 e^{\frac{1}{x+iy}} = \lim_{x\to +0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +0} \frac{e^{x^{-1}}}{x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to +0} \frac{e^{x^{-1}}\left(-x^{-2}\right)}{-2x^{-3}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to +0} \frac{e^{x^{-1}}}{x^{-1}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to +0} \frac{e^{x^{-1}}\left(-x^{-2}\right)}{-x^{-2}} = \infty$$

(или може да използваме редицата $x_n = \dfrac{1}{n}$).

От друга страна

$$\lim_{z\to 0} z^2 e^{\frac{1}{z}} = \lim_{\substack{x\to -0\\(y=0)}} (x+iy)^2 e^{\frac{1}{x+iy}} = \lim_{x\to -0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$$

(или работим с редицата $x_n = -\dfrac{1}{n}$).

Нека сега вземем редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, членовете на която са $z_n = \dfrac{1}{2\ln n + 2n\pi i}$ $(n = 1, 2, ...)$. Тогава стойностите на функцията $f(z)$ ще бъдат:

$$f(z_n) = \frac{1}{(2\ln n + 2n\pi i)^2} e^{2\ln n + 2n\pi i} = \frac{n^2}{(2\ln n + 2n\pi i)^2} =$$

$$= \frac{n^2}{4n^2\left(\dfrac{\ln n}{n} + 2\pi i\right)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\dfrac{\ln n}{n} + 2\pi i\right)^2} \underset{n\to\infty}{\to} -\frac{1}{16\pi^2},$$

тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

Следователно точката $z = 0$ е съществена особена точка на функцията $f(z)$.

Сега ще разгледаме *поведението на функцията* $f(z)$ *в околност на безкрайно отдалечената точка* $(z = \infty)$. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в някоя околност $|z| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ на безкрайно отдалечената точка $z = \infty$, изключвайки самата точка. Изображението $\dfrac{1}{z} = \zeta$ трансформира околността на точката $z = \infty$

в околност на точката $\zeta = 0$ $\left(|\zeta| < \varepsilon\right)$ в разширената комплексна равнина $\overline{\zeta}$ и по този начин свежда изучаването на поведението на функцията $f(z)$ в околност на точката $z = \infty$ към изучаването на поведението на функцията $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$ в околност на точката $\zeta = 0$. Ако функцията $f(z)$ е аналитична в околност на точката $z = \infty$, то $\varphi(\zeta)$ ще бъде аналитична в околност на точката $\zeta = 0$ и ще можем да я разложим в ред на Лоран в околността на тази точка:

(22) $$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^{-n} .$$

Полагайки в (22) $\zeta = \frac{1}{z}$, получаваме разложението на $f(z)$ в ред на Лоран в околността на точката $z = \infty$:

(23) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{n} .$$

При такава замяна регулярната част на реда се заменя с главната и обратно. Оттук виждаме, че за функцията $f(z)$ точката $z = \infty$ ще бъде *отстранима особена точка*, ако редът (22) не съдържа отрицателните степени на ζ, а редът (23) – положителните степени на z, т.е. ако има вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots .$$

Ако в този случай положим $\varphi(0) = c_0$, то $\varphi(\zeta)$ ще стане аналитична в точката $\zeta = 0$. Затова, ако за $f(z)$ точката $z = \infty$ е отстранима особена точка, то обикновено се казва, че $f(z)$ е аналитична в $z = \infty$, полагайки при това $f(\infty) = c_0 = \lim_{z \to \infty} f(z)$, а точката $z = \infty$ - *правилна* (*регулярна*).

Ако

(24) $$f(z)=\frac{c_m}{z^m}+\frac{c_{m+1}}{z^{m+1}}+\ldots;\ c_m\neq 0,$$

то $z=\infty$ се нарича m - *кратна нула* $(m\geq 1)$ на функцията $f(z)$.

Точката $z=\infty$ се нарича *полюс* от съответната кратност на функцията $f(z)$, ако разложението (22) съдържа само краен брой членове с отрицателни степени на ζ, а разложението (23) следователно съдържа краен брой членове с положителни степени на z.

И накрая точката $z=\infty$ се нарича *съществена особена точка* на функцията $f(z)$, ако редът (22) съдържа безкрайно множество членове с отрицателни степени на ζ, а редът (23) – безкрайно множество членове с положителни степени на z.

Тъй като $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{\zeta\to 0}\varphi(\zeta)$, то оттук е ясно, че за да бъде особената точка $z=\infty$ отстранима особена точка, полюс или съществена особена точка, е необходимо и достатъчно, границата $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ да бъде съответно крайна, безкрайна или да не съществува.

В точката $z=\infty$ очевидно остава в сила теорема 5 за връзката между нулите и полюсите.

Примери: Намерете особените точки на функцията $f(z)$ в разширената комплексна равнина $\overline{Z}$, ако:

8) $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$

Във всички крайни точки, освен $z=-i$, функцията $f(z)$ е аналитична. Точката $z=-i$ е прост полюс на $f(z)$, тъй като е проста нула на функцията $\dfrac{1}{f(z)}=z+i$. При $z\to\infty$ функцията

$f(z) \to 0$, следователно $z = \infty$ ще бъде правилна (регулярна) точка на $f(z)$. В това можем да се убедим, ако разложим $f(z)$ в ред на Лоран в областта $|z| > 1$. В тази област $\left| -\frac{i}{z} \right| = \frac{1}{|z|} < 1$, така че

$$f(z) = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \left(-\frac{i}{z} \right)} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{i}{z} + \frac{i^2}{z^2} - \ldots \right) = \frac{1}{z} - \frac{i}{z^2} + \frac{i^2}{z^3} - \ldots.$$

Полученият ред има вида (24) при $m = 1$, откъдето следва, че точката $z = \infty$ е проста нула на $f(z)$.

9) $f(z) = \sin z$

Тази функция е аналитична в цялата комплексна равнина Z. Редът $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$ има смисъл за $\forall z$, в това число и за $|z|$ произволно големи. Следователно това разложение може да се разглежда като ред на Лоран в околността на точката $z = \infty$. Доколкото това разложение има безкрайно множество членове с положителни степени на z, то $z = \infty$ е съществена особена точка на функцията $\sin z$.

10) $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$

Тази функция е аналитична във всички крайни точки z като линейна комбинация от степенни (следователно аналитични) функции. Задаването на функцията може да се разглежда като неин ред на Лоран в околност на точката $z = \infty$. Тъй като този ред съдържа краен брой членове с положителни степени на z, то $z = \infty$ е n - кратен полюс на $f(z)$.

11) $f(z) = \dfrac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$; $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, като дробта е несъкратима

Дробно-рационалната функция е аналитична във всички точки на комплексната равнина Z освен точките, в които се анулира знаменателят. Нулите на знаменателя са полюси на $f(z)$ и кратността на тези полюси съвпада с кратността на съответстващите им нули на знаменателя (имаме по условие несъкратима дроб). По-нататък записваме

$$f(z) = z^{n-m} \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \ldots + \dfrac{a_n}{z^n}}{b_0 + \dfrac{b_1}{z} + \ldots + \dfrac{b_m}{z^m}} = z^{n-m} \varphi\left(\frac{1}{z}\right),$$

където $\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right) \to \dfrac{a_0}{b_0}$ при $z \to \infty$. Оттук виждаме, че ако $n > m$, то $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ и точката $z = \infty$ е полюс на $f(z)$; не е трудно да се покаже, че кратността на този полюс е $n - m$. Ако пък $n \leq m$, то $f(z) \to 0$ или $f(z) \to \dfrac{a_0}{b_0}$ при $z \to \infty$ и точка $z = \infty$ ще бъде правилна (регулярна) точка на функцията (при $n < m$ точката $z = \infty$ $(m - n)$ - кратна нула).

Задачи

I. Да се развият в ред на Тейлор или Лоран функциите:

1) $f(z) = \dfrac{2z - 5}{z^2 - 5z + 6}$ **а)** в областта $|z| < 2$;

б/ във венеца: $2 < |z| < 3$;

в/ в областта: $|z| > 3$

Решение: Намираме нулите на знаменателя

$$z^2 - 5z + 6 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \text{ или } z_1 = 2,\ \ z_2 = 3.$$

Записваме функцията $f(z)$ във вида: $f(z) = \dfrac{2z-5}{(z-2)(z-3)}$ и я разлагаме на елементарни дроби

$$f(z) = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} = \frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}.$$

Намираме, че $A = B = 1$. Тогава $f(z) = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z-3}$.

а) Разлагаме $f(z)$ в областта $|z| < 2$. Представяме функцията във вида $f(z) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} - \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}$. Тъй като по условие $|z| < 2$, то $\dfrac{|z|}{2} < 1$, а $\dfrac{|z|}{3} < \dfrac{2}{3} < 1$; тогава двете събираеми в $f(z)$ можем да приемем за суми на сходящи геометрични редове от вида $\dfrac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q|<1$, с частни, съответно, $q_1=\dfrac{z}{2}$ и $q_2=\dfrac{z}{3}$. Получаваме

$$f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n,$$

$|z|<2$.

б) Във венеца $2<|z|<3$ преработваме $f(z)$ така:

$f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z}}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{3}}$. Тук $|q_1|=\dfrac{2}{|z|}<1$, тъй като $|z|>2$, а $|q_2|=\dfrac{|z|}{3}<1$, тъй като $|z|<3$. Следователно

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n-1}z^n,$$

$2<|z|<3$.

в) За областта $|z|>3$ записваме функцията във вида

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{3}{z}}.$$

Сега $\left|q_1\right| = \frac{2}{|z|} < \frac{2}{3} < 1$ и $\left|q_2\right| < \frac{3}{|z|} < 1$, тъй като $|z| > 3$. Оттук

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n + 3^n\right)z^{-n-1},\ |z| > 3.$$

2) $f(z) = e^z \sin z, \quad |z| < \infty$

Решение: *I начин.* $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

за $|z| < \infty$. Използваме правилото за умножаване на редове и получаваме $f(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$

$$= \left(1 + \frac{z}{1!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) =$$

$$= z + z^2 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)z^3 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right)z^4 +$$

$$+\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!}\right)z^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}.\frac{z^n}{n!}.$$ (Проверете!)

II начин. $f(z) = e^z \sin z =$

$$= e^{z}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}\right] =$$

$$\frac{1}{2i}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^n}{n!}\right\} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!}\,z^n.$$

Но в тригонометричен вид $(1+i)^n-(1-i)^n =$

$$=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n - \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^n =$$

$$=\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\,\sin\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2i\sqrt{2^n}\,\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Следователно $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{2^n}\,\sin\frac{n\pi}{4}.\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<\infty$.

III начин. $f(z) = e^z\sin z, \quad f(0)=0$. С метода на пълната математична индукция ще изведем формула за $n-$та производна на $f(z)$:

$f'(z) = e^z(\sin z+\cos z)$. Но $\sin\alpha+\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

Следователно $f'(z) = \sqrt{2}\,e^z\sin\left(\frac{\pi}{4}+z\right)$.

$$f''(z)=\sqrt{2}\ e^{z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+z\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\right]=.$$

$$=\sqrt{2^2}\ e^{z}\sin\left(2\frac{\pi}{4}+z\right).$$

Допускаме, че $f^{(n)}(z)=\sqrt{2^n}e^{z}\sin\left(n\frac{\pi}{4}+z\right)$.

Ще докажем, че $f^{(n+1)}(z)=\sqrt{2^{n+1}}e^{z}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{4}+z\right]$.

Наистина, $f^{(n+1)}(z)=\left[f^{(n)}(z)\right]'=$

$$=\sqrt{2^n}e^{z}\left[\sin\left(n\frac{\pi}{4}+z\right)+\cos\left(n\frac{\pi}{4}+z\right)\right]=$$

$$=\sqrt{2^n}e^{z}\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{4}+z\right)=\sqrt{2^{n+1}}e^{z}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{4}+z\right].$$

Следователно за $\forall n=1,2,\ldots$ имаме

$$f^{(n)}(z)=\sqrt{2^n}e^{z}\sin\left(n\frac{\pi}{4}+z\right).$$

Оттук $f^{(n)}(0)=\sqrt{2^n}\sin n\frac{\pi}{4}$.

Знаем, че редът на Тейлор за функцията $f(z)$ в околността на точката $z=0$ е: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,z^n$.

В нашия случай $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}\frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$.

3) $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$, $|z|<1$

Решение: *I начин*. Използваме биномния ред $(1+z)^m=$

$$=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\ldots,$$

$|z|<1$. Тогава $f(z)=\left[1+(-z)\right]^{-2}=$

$$=1+\frac{-2}{1!}(-z)+\frac{-2(-3)}{2!}(-z)^2+\frac{-2(-3)(-4)}{3!}(-z)^3+\ldots=$$

$$=1+2z+3z^2+4z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,\ |z|<1.$$

II начин. Интегрираме функцията $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$.

Получаваме

$$\varphi(z) = \int f(z)dz + C = \int \frac{1}{(1-z)^2}dz + C = \frac{1}{1-z} + C,$$

където C е произволна константа.

Тъй като по условие $|z| < 1$, то $\dfrac{1}{1-z}$ е сума на сходящ геометричен ред с частно $q = z$: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$, $|z|<1$, т.е. $\varphi(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Тогава

$$\varphi'(z) = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z|<1$$

Почленното диференциране на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ е законно вътре в областта на сходимост $|z|<1$ на този ред. Полученият ред има същия радиус на сходимост $R=1$. Общият член на реда $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ е $u_n = (n+1)z^n$, откъдето върху окръжността $|z|=1$ имаме $|u_n| = n+1 \to \infty$ при $n \to \infty$. Следователно не се изпълнява необходимото условие за сходимост и редът $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ е разходящ за $|z|=1$.

И така, $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$, $|z|<1$.

4) $f(z) = \arcsin z, \ |z| \leq 1$

Решение: Намираме $f'(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \left[1+\left(-z^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} =$

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-z^2\right)}{1!} + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-z^2\right)^2}{2!} +$$

$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-z^2\right)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2.1!}z^2 + \frac{1.3}{2^2.2!}z^4 + \frac{1.3.5}{2^3.3!}z^6 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1!!}{2!!}z^2 + \frac{3!!}{4!!}z^4 + \frac{5!!}{6!!}z^6 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^{2n},$$

$|z| < 1$. (Използваме биномния ред - зад. 3.)

Интегрираме полученото равенство по произволна крива с начална точка $z = 0$ и крайна z, $|z| < 1$. (Почленното интегриране на степенния ред в горното равенство е законно вътре в областта на сходимост. При това полученият след интегрирането ред ще има същия радиус на сходимост $R = 1$.) Отчитайки, че $f(0) = 0$, получаваме:

$$f(z) = \int_0^z f'(\zeta)d\zeta = \int_0^z 1.d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^z \zeta^{2n} d\zeta =$$

$$= z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \ |z| < 1.$$

Проверяваме дали полученият ред е сходящ за точките по окръжността $|z| = 1$. Използваме критерия на Раабе-Дюамел:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}(2n+3) - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{\left(4n^2+10n+6\right)-\left(4n^2+4n+1\right)}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1;$$

следователно редът е абсолютно сходящ.

И така, $\arcsin z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \ |z| \le 1.$

5) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}, \ |z| < 1$

отг. $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - 2^{-n-1}\right] z^n, \ |z| < 1$

6) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1},\ \ |z|<1$ **отг.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^{3n}-z^{3n+1}\right),\ \ |z|<1$

(***Упътване*:** Умножете числителя и знаменателя със $(z-1)$.)

7) $f(z)=\ln\dfrac{1+z}{1-z},\ \ |z|<1$ **отг.** $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|\le 1,\ z\neq\pm 1$

(***Упътване*:** Използвайте, че $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n},\ |z|\le 1,$

$z\neq -1$.)

8) $f(z)=\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^2},\ |z|<1$ **отг.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n},\ |z|<1$

9) $f(z)=\sin^4 z+\cos^4 z$ в околност на точката $z=0$

отг. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{4n-2}}{(2n)!}z^{2n},\ |z|<\infty$

(***Упътване*:** Преработете функцията до възможно най-простия вид.)

10) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ в околност на точката $z=0$

отг. $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-3^{-n}\right]z^n,\ \ |z|<1$

11) $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-4\right)}$ в околност на точката $z=0$

отг. $\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\left(-1\right)^{n+1}-4^{-n-1}\right]z^{2n+1},\ |z|<1$

12) $f(z)=\dfrac{z^3}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)}$ в околност на точката $z=0$

отг. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(z^{4n}+z^{4n-1}\right),\ |z|<1$

13) $f(z)=\cos^2 z+\mathrm{ch}^2 z$ в околност на точката $z=0$

отг. $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{4n}}{\left(4n\right)!}z^{4n},\ |z|<\infty$

14) $f(z)=\arg\mathrm{sh}z$ в околност на точката $z=0$

отг. $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}.\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|\le 1$

15) $f(z)=\sqrt{1+z^2},\ |z|<1$

отг. $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{\left(2n-2\right)!}{2^{2n-1}n!\left(n-1\right)!}z^{2n},\ |z|\le 1$

16) $f(z)=\mathrm{arctg}z,\ |z|\le 1$

отг. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{2n+1}z^{2n+1},\ |z|\le 1$

17) $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}},\ 0<|z|<\infty$

отг. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$;

$$c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \quad (n = 0,1,....)$$

18) $f(z) = \dfrac{1}{3-2z}$ в околност на точката $z = 3$

Решение: Преработваме дадената функция

$$f(z) = \frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3-2(z-3+3)} = -\frac{1}{3+2(z-3)} =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\left[-\frac{2}{3}(z-3)\right]}.$$

Тук $|q| = \left|-\frac{2}{3}(z-3)\right| = \frac{2}{3}|z-3| < 1$, т.е. $|z-3| < \frac{3}{2}$, и тогава можем да използваме сходящ геометричен ред. Получаваме

$$f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2}{3}(z-3)\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{3^{n+1}} (z-3)^n ,$$

$|z-3| < \frac{3}{2}$.

19) $f(z) = \sin(2z+1)$ по степените на $z+1$

отг. $\cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+1} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} (z+1)^{2n}$,

$|z+1| < \infty$

20) $f(z)=\cos z$ по степените на $z+\dfrac{\pi}{4}$

отг. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{n\pi}{2}\right).\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)^{n}, \quad \left|z+\dfrac{\pi}{4}\right|<\infty$

21) $f(z)=e^{z}$ по степените на $2z-1$

отг. $\sqrt{e}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2z-1)^{n}}{(2n)!!}, \ |2z-1|<\infty$

22) $f(z)=\ln\left(2+z-z^{2}\right)$ в околност на точката $z=0$

отг. $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right]\dfrac{z^{n}}{n}, \ |z|\leq 1, \ z\neq -1$

23) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(2-z)}$ в околност на точката $z=1$

отг. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right](z-1)^{n}, \ |z-1|<1$

24) $f(z)=\mathrm{ch}z$ в околност на точката $z=1$

отг. $\mathrm{ch}1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{sh}1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ |z-1|<\infty$

25) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z-2)^{2}}$:

а) в околност на точката $z=-1$;
б) в околност на точката $z=2$

отг. а) $-\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{z+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{3^{n+3}}(z+1)^{n}, \ 0<|z+1|<3$;

б) $\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{(z-2)^2}+\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{z-2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(z-2)^n}{3^{n+3}},\ 0<|z-2|<3$

26) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$ в околност на точката $z=1$

отг. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos\left(1+\dfrac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n},\quad 0<|z-1|<\infty$

27) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$:

а) в околност на точката $z=1$;
б) в околност на точката $z=2$

отг. а) $-\dfrac{2}{z-1}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,\ 0<|z-1|<1$;

б) $\dfrac{3}{z-2}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n,\ 0<|z-2|<1$

28) $f(z)=(z+1)^2\cos\dfrac{1}{z}$ в околност на точката $z=0$

отг. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z^{-2n+2}+2z^{-2n+1}+z^{-2n}\right),\ 0<|z|<\infty$

29) $f(z)=\operatorname{sh}\dfrac{z}{z-1}$ в околност на точката $z=1$

отг. $\operatorname{sh}1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{-2n}}{(2n)!}+\operatorname{ch}1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{-2n-1}}{(2n+1)!},\ 0<|z-1|<\infty$

30) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$:

а) в околност на точката $z = 2 + i$;
б) в околност на точката $z = -3 - 2i$

$$\textbf{отг. а)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} \left[1 + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(n+1)i}}{2^{\frac{n+1}{2}}} \right] (z-2-i)^n, \quad |z-2-i| < 2;$$

$$\textbf{б)}\ -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}(1+i)^{n+1}} + \frac{1}{(3+i)^{n+1}} \right] (z+3+2i)^n,$$

$$|z+3+2i| < \sqrt{10}$$

31) $f(z) = z e^{\frac{z}{z-5}}$ в околност на точката $z = 5$

$$\textbf{отг}.\ e\left[z - 5 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)5^{n+1}}{(n+1)!} (z-5)^{-n} \right], 0 < |z-5| < \infty$$

32) $f(z) = \cos \dfrac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$ в околност на точката $z = 2$

$$\textbf{отг.}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n \cos\left(1 + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!(z-2)^{2n}}, \quad 0 < |z-2| < \infty$$

33) $f(z) = z e^{\frac{\pi}{(z-a)^2}}$ в околност на точката $z = a$

$$\textbf{отг.}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \left[\frac{1}{(z-a)^{2n-1}} + \frac{a}{(z-a)^{2n}} \right], \ 0 < |z-a| < \infty$$

34) $f(z) = z \sin \pi \dfrac{z+2}{z}$ в околност на точката $z = 0$

отг. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-2n},\ \ 0<|z|<\infty$

35) $f(z)=\operatorname{sh}\frac{2z-2}{z+2}$ в околност на точката $z=-2$

отг. $\operatorname{sh}2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^{2n}}{(2n)!}(z+2)^{-2n}-\operatorname{ch}2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^{2n+1}}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1},$

$0<|z+2|<\infty$

36) $f(z)=z^2\sin\frac{z+3}{z}$ в околност на точката $z=0$

отг. $\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!}z^{-2n+2}+\cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-2n+1},$

$0<|z|<\infty$

37) $f(z)=e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$ в околност на точката $z=1$

отг. $e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{1}{(z-1)^{2n}},\ \ 0<|z-1|<\infty$

38) $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z-2},\ 0<|z-2|<\infty$

отг. $(z-2)^3+6(z-2)^2+\frac{23}{2}(z-2)+$

$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{48n^2+168n+143}{(2n+4)!}(z-2)^{-2n-1}+$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}(8n+2)(4n+5)(z-2)^{-2n},\ 0<|z-2|<\infty$$

39) $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}+\cos^2 z$ по степените на z

отг. $2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!+(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n},\ |z|<1$

40) $f(z)=e^z\cos z$ по степените на z

отг. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{2^n}\cos\dfrac{n\pi}{4}.\dfrac{z^n}{n!},\ |z|<\infty$

41) $f(z)=\dfrac{1}{\left(1+z^4\right)^2}$ по степените на z

отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,z^{4n-4},\ |z|<1$

42) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(1-z)},\quad 0<|z-1|<1$ **отг.**

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n e^{-1}(z-1)^n+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left[e^{-1}-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\right](z-1)^{-n},$$
$$0<|z-1|<1$$

II. Напишете първите няколко члена от разложението на функцията $f(z)$ в ред на Тейлор по степените на z и определете радиуса на сходимост на този ред:

1) $f(z)=e^{\cos z}$ **отг.** $f(z)=e\left(1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^4+...\right);R=\infty$

2) $f(z)=e^{z\sin z}$ **отг.** $f(z)=1+z^2+\frac{z^4}{3}+...;R=\infty$

3) $f(z)=\frac{1}{1+e^z}$

отг. $f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}z+\frac{1}{3!2^3}z^3-\frac{1}{5!2^2}z^5+...;\ R=\pi$

(***Упътване***: Най-близката особена точка до точката $z=0$ е $z=\pi i$. Оттук $R=\left|i\pi-0\right|=\pi$.)

4) $f(z)=\ln\left(1+e^{-z}\right)$

отг. $f(z)=\ln 2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2!2^2}z^2-\frac{1}{4!2^3}z^4+...;\ R=\pi$

5) $f(z)=\ln\cos z$

отг. $f(z)=-\frac{1}{2!}z^2-\frac{2}{4!}z^4-\frac{16}{6!}z^6+...;\ R=\frac{\pi}{2}$

6) $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$

отг. $f(z)=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+...\right);\ R=1$

7) $f(z)=\left(1+z\right)^z$

отг. $f(z)=1+z^2-\frac{1}{2}z^3+\frac{5}{6}z^4-\frac{3}{4}z^5+...;\ R=1$

(***Упътване***: $f(z)=e^{z\ln(1+z)}$.)

III. Пресметнете границите, използвайки разложението на функциите в ред на Тейлор по степените на z:

1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{e^z-1}$ **отг.** 1

2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin 2z-2z\cos z}{z^3}$ **отг.** $-\dfrac{1}{3}$

3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{z^2}-1}{\operatorname{sh}\dfrac{z^2}{2}}$ **отг.** 2

4) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(1+z)^m-1}{z}$, $m=const\neq 0$ **отг.** m

IV. Намерете сумите на редовете:

1) а) $\dfrac{\cos\varphi}{1!}-\dfrac{\cos 3\varphi}{3!}+\dfrac{\cos 5\varphi}{5!}-\ldots;$ **отг.** $\sin(\cos\varphi).\operatorname{ch}(\sin\varphi)$

б) $\dfrac{\sin\varphi}{1!}-\dfrac{\sin 3\varphi}{3!}+\dfrac{\sin 5\varphi}{5!}-\ldots$ **отг.** $\cos(\cos\varphi).\operatorname{sh}(\sin\varphi)$

(***Упътване***: Докажете първо, че редовете са абсолютно сходящи. Означете сумата на реда в а) с S_1, а в б) с S_2. Пресметнете S_1+iS_2, ако $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.)

2) а) $1-\dfrac{\cos 2\varphi}{2!}+\dfrac{\cos 4\varphi}{4!}-\ldots;$ **отг.** $\cos(\cos\varphi).\operatorname{ch}(\sin\varphi)$

б) $\dfrac{\sin 2\varphi}{2!}-\dfrac{\sin 4\varphi}{4!}+\dfrac{\sin 6\varphi}{6!}-\ldots$ **отг.** $\sin(\cos\varphi).\operatorname{sh}(\sin\varphi)$

(***Упътване***: Аналогично на зад.1, но сметнете S_1-iS_2.)

V. Намерете изолираните особени точки на дадените функции и определете техния тип:

1) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin\frac{1}{z}}$ **отг.** $z_k=\dfrac{1}{k\pi},\ (k=\pm1,\pm2,...)$ - прости полюси ($z=0$ не е изолирана особена точка)

2) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ **отг.** $z_k=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ - прости полюси

3) $f(z)=\mathrm{tg}^2 z$ **отг.** $z_k=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, - двукратни полюси

4) $f(z)=z\,\mathrm{cotg}\,z\,e^{\frac{1}{z}}$ **отг.** $z=0$ - съществена особена точка, $z_k=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,...)$ - прости полюси

5) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$ **отг.** $z=0$ и $z=-1$ - двукратни полюси

6) $f(z)=\dfrac{(z+\pi)\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}iz}{z\sin^2 z}$ **отг.** $z=0$, $z_k=k\pi\ (k=1,\pm2,...)$ - двукратни полюси; $z=-\pi$ - прост полюс

7) $f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$ **отг.** $z_k=(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$ - прости полюси

8) $f(z)=\mathrm{cotg}\dfrac{1}{z}$ **отг.** $z_k=\dfrac{1}{k\pi}\ (k=\pm1,\pm2,...)$ - прости полюси ($z=0$ не е изолирана особена точка)

9) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z^2}$ **отг.** $z_k=\pm\sqrt{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}$ - прости полюси

10) $f(z)=\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$ **отг.** $z=0$ **-** прост полюс

11) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$ **отг.** $z=0$ **-** четирикратен полюс,

$z_k=2k\pi \quad (k=\pm1,\pm2,...)$ **-** прости полюси

12) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$ **отг.** $z=0$ **-** съществена особена точка

13) $f(z)=\dfrac{2z-\sin 2z}{z^3\left(z^2+1\right)}$ **отг.** $z=\pm i$ - прости полюси,

$z=0$ **-** отстранима особена точка

14) $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{z^4-1}\,e^{\frac{1}{z}}$ **отг.** $z=\pm1$ - отстраними особени точки,

$z=\pm i$ - прости полюси, $z=0$ **-** съществена особена точка

15) $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2-4\right)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$ **отг.** $z=-2$ -двукратен полюс,

$z_k=2+\dfrac{2}{(2k+1)\pi},\ k\in\mathbb{Z}$ - прости полюси

($z=2$ - не е изолирана особена точка)

VI. Да се определи видът на особената точка $z=0$:

1) $f(z)=\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z - z + \dfrac{z^3}{6}}$ **отг.** 4 - кратен полюс

2) $f(z)=z^3 e^{\frac{7}{z^2}}$ **отг.** съществена особена точка

3) $f(z)=\dfrac{\cos 7z-1}{\operatorname{sh} z - z - \dfrac{z^3}{6}}$ **отг.** 3 - кратен полюс

4) $f(z)=z\sin\dfrac{6}{z^2}$ **отг.** съществена особена точка

5) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}6z-6z}{\operatorname{ch} z - 1 - \dfrac{z^2}{2}}$ **отг.** прост полюс

6) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}5z-1}{e^z-1-z}$ **отг.** отстранима особена точка

7) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin z - z}$ **отг.** 2 - кратен полюс

8) $f(z)=\dfrac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + \dfrac{z^2}{2}}$ **отг.** отстранима особена точка

9) $f(z)=\dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z-1-z}$ **отг.** отстранима особена точка

10) $f(z)=z^2\cos\dfrac{2}{z^3}$ **отг.** съществена особена точка

11) $f(z)=\dfrac{\cos\dfrac{z^4}{2}}{\cos iz-1-\dfrac{z^2}{2}}$ **отг.** 4 - кратен полюс

12) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}^3 iz}{z(1-\cos z)}$ **отг.** отстранима особена точка

13) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$ **отг.** съществена особена точка

VII. Докажете, че $z=0$ не е изолирана особена точка за функциите:

1) $f(z)=\sin\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}\right)$ **2)** $f(z)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$

(***Упътване*:** Вижте пример 2, § 11.)

VIII. Да се изясни характерът на безкрайно отдалечената точка на дадените по-долу функции:

1) $f(z)=\dfrac{z^2}{5-2z^2}$ **отг.** отстранима особена точка

2) $f(z)=\dfrac{3z^5-5z+2}{z^2+z-4}$ **отг.** 3 - кратен полюс

3) $f(z)=\dfrac{z}{1-3z^4}$ **отг.** отстранима особена точка

4) $f(z)=1-z+2z^2$ **отг.** 2 - кратен полюс

5) $f(z) = e^{-z}$ **отг.** съществена особена точка

6) $f(z) = \cos z$ **отг.** съществена особена точка

7) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + 2z^2 - 5$ **отг.** 2 - кратен полюс

8) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ **отг.** отстранима особена точка

9) $f(z) = e^{\frac{1}{3-2z}}$ **отг.** отстранима особена точка

10) $f(z) = e^{-2z} + 3z^3 - z + 8$ **отг.** съществена особена точка

IX. Нека е даден редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\left(z - z_0\right)^n}$. Да се докаже, че този ред е абсолютно сходящ в областта $|z - z_0| > r$, ако $c_{-n} \neq 0$ и съществува крайна граница $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$.

(***Упътване***: Приложете критерия на Даламбер.)

Използвайте доказаното, за да определите областта на абсолютна сходимост на следните редове:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+i\right)^{n+1}}{z^n}$

Решение: Коефициентът $c_{-n} = \left(1+i\right)^{n+1}$, а $c_{-n-1} = \left(1+i\right)^{n+2}$. Тогава $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+i|^{n+2}}{|1+i|^{n+1}} = |1+i| = \sqrt{2}$, т.е. редът е абсолютно сходящ в областта $|z| > \sqrt{2}$. При $|z| = \sqrt{2}$ общият член на реда не клони към нула по абсолютна стойност при $n \to \infty$, защото $|u_n| = \dfrac{|1+i|^{n+1}}{\sqrt{2^n}} = \dfrac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} = \sqrt{2}$.

Следователно върху окръжността $|z| = \sqrt{2}$ редът е разходящ.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin in}{(z+i)^n}$ **отг.** $|z+i| \geq e$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{in}}{(z+1)^n}$ **отг.** $|z+1| > 1$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1-i)^n z^n}$ **отг.** $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{-n}}{\cos in}$ **отг.** $|z| > e^{-1}$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{(iz)^n}$ **отг.** $|z| > e$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n 2^{-n}}{(z-2-i)^n}$ **отг.** $|z-2-i| > \dfrac{1}{2}$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + 1}{(z+2i)^n}$ **отг.** $|z+2i| > 3$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{z}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{4}\right)^n$ **отг.** $2 < |z| < 4$

(***Упътване***: За определяне на областта на абсолютна сходимост $|z| > r$ на първото събираемо използвайте идеята на предишните примери, а на второто събираемо $(|z| < R)$ - идеята на задачите от

§ 5, където $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Областта на абсолютна сходимост на цялата сума ще бъде сечението от двете области, т.е. $r<|z|<R$.)

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}\quad (0!=1)$ **отг.** $|z-i|>e$

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$ **отг.** $\varnothing$

(***Упътване***: Вижте задача 3. Сечението
$(|z+1|>1)\cap(|z+1|<1)\ =\varnothing$.)

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$ **отг.** $5<|z+2i|<6$

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n$ **отг.** $\varnothing$

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 z^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$ **отг.** $1\le|z|<2$

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$ **отг.** $|z+1|>2$

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^n}{z^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ **отг.** $|z|>2$

§12. Резидууми[59]. Основна теорема за резидуумите. Приложения

Дефиниция 1. *Резидуум* или *интегрален остатък* на аналитичната функция $f(z)$ в крайната изолирана особена точка z_0 се нарича интегралът $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)\,dz$, където L е затворена Жорданова гладка крива, лежаща изцяло в областта D на аналитичност на функцията $f(z)$, заграждаща единствената особена точка z_0 и описана един път в положителна посока. Означава се с $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ или по-кратко (когато е ясно за коя функция става дума) с $\operatorname{Res}(z_0)$.

От следствие 3 на основната теорема на Коши за многосвързана област (§ 9) е ясно, че в качеството на L може да се вземе окръжност $|z-z_0|=\rho$ с достатъчно малък радиус ρ, за да загражда само точка z_0. Тогава

(1) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz .$$

Ако разложим функцията $f(z)$ в ред на Лоран във венеца $0<|z-z_0|<\delta$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n ,$$

[59] От латинското "Residuum", което буквално означава "остатък". Теорията на резидуумите е разработена от Коши (1826-1830), който публикува през този период 16 статии, посветени на тази теория.

където $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}\,dz$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то, полагайки $n = -1$ във формулата за c_n, получаваме, че

(2) $$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz\,,$$

където L е например окръжността $\left|z - z_0\right| = \rho < \delta$, изцяло лежаща във венеца $0 < |z - z_0| < \delta$.

Съпоставяйки (1) и (2) става ясно, че

(3) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f\left(z\right) = c_{-1}\,,$$

т.е. резидуумът на $f\left(z\right)$ в точката z_0 е равен на коефициента c_{-1} в Лорановото развитие на тази функция.

Ще покажем *по-прости начини за пресмятане на резидуумите в зависимост от характера на особената точка* z_0.

1) Нека $z = z_0$ е *отстранима особена точка* на функцията $f\left(z\right)$. Както знаем Лорановото развитие на $f\left(z\right)$ не съдържа отрицателни степени (главна част), т.е. $c_{-1} = 0$. Следователно

(4) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f\left(z\right) = 0\,.$$

2) Нека $z = z_0$ е *прост полюс* на функцията $f\left(z\right)$, т.е. полюс от кратност $m = 1$. Тогава Лорановото развитие на $f\left(z\right)$ има вида:

$$f\left(z\right) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1\left(z - z_0\right) + c_2\left(z - z_0\right)^2 + \ldots.$$

Оттук $(z-z_0)f(z)=c_{-1}+c_0(z-z_0)+c_1(z-z_0)^2+\ldots$ и при $z\to z_0$ получаваме, че

(5) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Изчисляването на резидуумите още повече се опростява, ако $f(z)$ има вида $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, където $\varphi(z_0)\neq 0$, а $\psi(z)$ има проста нула $z=z_0$, т.е. $\psi(z_0)=0$, но $\psi'(z_0)\neq 0$. Тогава $z=z_0$ е прост полюс за функцията $f(z)$ и по формула (5) имаме:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

И така в този случай

(6) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

3) Нека $z=z_0$ е m- кратен $(m\geq 1)$ полюс на $f(z)$. Тогава Лорановото развитие на тази функция е $f(z)=$

$$=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots.$$

Оттук $(z-z_0)^m f(z)=$

$$=c_{-m}+(z-z_0)c_{-m+1}+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\ldots.$$

Диференцирайки почленно $(m-1)$ пъти горното равенство, получаваме

$$\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}} =$$

$$=(m-1)!c_{-1}+m(m-1)...2c_0(z-z_0)+\dots .$$

Оттук при $z \to z_0$ имаме

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}} = (m-1)!c_{-1}$$

или

(7) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}}.$$

(При $m=1$ от (7) се получава формула (5)).

Лесно се проверява, че формула (7) е в сила и когато кратността на полюса е по-малка от m.

4) Ако $z=z_0$ е *съществена особена точка*, то $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$, т.е. резидуумът се пресмята по формула (3). В този случай функцията $f(z)$ трябва да се развие в ред на Лоран и непосредствено от него да се вземе стойността на коефициента c_{-1} пред $(z-z_0)^{-1}$.

Примери: Пресметнете резидуумите в крайните особени точки на следните функции:

1) $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sh} z}{z^3}$

Решение: Точката $z=0$ е 3- кратна нула на знаменателя и 3- кратна нула на числителя (Проверете!). Следователно $z=0$ е отстранима особена точка на тази функция. Тогава по формула (4) имаме, че $\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\, f(z)=0$.

2) $f(z)=\dfrac{z-\operatorname{sh} z}{z^4}$

Решение: Сега $z=0$ е 4- кратна нула на знаменателя и 3- кратна нула на числителя, т.е. $z=0$ е прост полюс на дадената функция. Тогава по формула (5) получаваме

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\lim_{z\to 0} z\frac{z-\operatorname{sh} z}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{z-\operatorname{sh} z}{z^3}=$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\operatorname{ch} z}{3z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{-\operatorname{sh} z}{6z}=-\frac{1}{6}.$$

(Тук приложихме правилото на Лопитал[60] и използвахме основната граница $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} z}{z}=1$).

3) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\dfrac{\pi}{2}}$

Решение: Тук особена точка на $f(z)$ е $z=\dfrac{\pi}{2}$. Тъй като $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\cos\dfrac{\pi}{2}=1\neq 0$, а $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, но $\psi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, то $z=\dfrac{\pi}{2}$

[60] G. F. de L'Hôpital (1661-02.02.1704).

е прост полюс на функцията $f(z)$. За пресмятането на резидуума в $z=\dfrac{\pi}{2}$ може да се използва както формула (5), т.е.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\frac{1+\cos z}{z-\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos z\right)=1,$$

така и формула (6), а именно:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\left.\frac{1+\cos z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=\left.\left(1+\cos z\right)\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=1.$$

4) $f(z)=\dfrac{2\cos z}{z\left(z-\pi\right)^2}$

Решение: Тук $z=0$ е прост полюс, а $z=\pi$ - двукратен полюс на функцията $f(z)$. Тогава

$$\operatorname{Re}s(0)=\left.\frac{\dfrac{2\cos z}{\left(z-\pi\right)^2}}{z'}\right|_{z=0}=\left.\frac{2\cos z}{\left(z-\pi\right)^2}\right|_{z=0}=\frac{2}{\pi^2}$$

(формула (6)). Пресмятаме сега

$$\operatorname{Re}s\,(\pi)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to\pi}\left[\left(z-\pi\right)^2\frac{2\cos z}{z\left(z-\pi\right)^2}\right]'=2\lim_{z\to\pi}\left(\frac{\cos z}{z}\right)'=$$

$$=2\lim_{z\to\pi}\frac{-z\sin z-\cos z}{z^2}=\frac{2}{\pi^2}.$$

5) $f(z) = \dfrac{e^z - \sin z - 1}{z^4(z-\pi)}$

Решение:

Особените точки на функцията $f(z)$ са $z=0$ и $z=\pi$. Точката $z=\pi$ е прост полюс (убедете се сами), а точката $z=0$ е двукратен полюс. Наистина, нека означим числителя на дадената функция с $\varphi(z)$, а знаменателя – с $\psi(z)$, т.е. $\varphi(z) = e^z - \sin z - 1$, а $\psi(z) = z^4(z-\pi)$. Тогава $z=0$ е 4 - кратна нула на знаменателя. За числителя имаме: $\varphi(0)=0$; $\varphi'(z) = e^z - \cos z$, $\varphi'(0)=0$; $\varphi''(z) = e^z + \sin z$, $\varphi''(0) = 1 \neq 0$. Следователно $z=0$ е двукратна нула на числителя. И така $z=0$ е $4-2=2$- кратен полюс на функцията $f(z)$ (виж твърдение 1^0), § 11). Пресмятаме резидуумите в тези два полюса:

$$\operatorname{Re}s(\pi) = \left.\frac{\dfrac{e^z - \sin z - 1}{z^4}}{(z-\pi)'}\right|_{z=\pi} = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi^4} \text{ (формула (6))};$$

$$\operatorname{Re}s(0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left[(z-0)^2\frac{e^z - \sin z - 1}{z^4(z-\pi)}\right]' = \lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z - \sin z - 1}{z^2(z-\pi)}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\left(e^z - \cos z\right)z^2(z-\pi) - \left(e^z - \sin z - 1\right)\left(3z^2 - 2\pi z\right)}{z^4(z-\pi)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\lim_{z\to 0}\frac{\left(e^z - \cos z\right)\left(z^2 - \pi z\right) - \left(e^z - \sin z - 1\right)\left(3z - 2\pi\right)}{z^3} =$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-\cos z}{z}-\frac{3}{\pi^2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-\sin z-1}{z^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{z\to 0}\frac{2\left(e^z-\sin z-1\right)-z\left(e^z-\cos z\right)}{z^3}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z+\sin z}{1}-\frac{3}{2\pi^2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-\cos z}{z}+$$

$$+\frac{1}{3\pi}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-\cos z-z\left(e^z+\sin z\right)}{z^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}-\frac{3}{2\pi^2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z+\sin z}{1}-\frac{1}{6\pi}\lim_{z\to 0}\left(e^z+\cos z\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}-\frac{3}{2\pi^2}-\frac{1}{3\pi}=-\frac{1}{2\pi^2}-\frac{1}{3\pi}.$$

(За втората и третата граници приложихме два пъти правилото на Лопитал, а за първата – един път.)

6) $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z+i}$

Решение: Точката $z=-i$ е съществена особена точка на дадената функция $f(z)$. Ето защо развиваме тази функция в ред на Лоран във венеца $0<|z+i|<\delta$. За тази цел ще използваме познатия ред за $\cos z$, а именно: $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, където вместо z ще пишем $\dfrac{1}{z+i}$. Функцията $f(z)$ записваме във вида:

$$f(z) = (z+i-i)^2 \cos\frac{1}{z+i} =$$

$$= (z+i)^2 \cos\frac{1}{z+i} - 2i(z+i)\cos\frac{1}{z+i} - \cos\frac{1}{z+i}.$$

Ще обърнем обаче внимание на факта, че първото и послeното събираеми в горното равенство са четни функции и в тяхното Лораново развитие няма да има нито положителни, нито отрицателни нечетни степени на $z+i$, т.е. в техните развития $c_{-1} = 0$. Достатъчно е да запишем Лорановото развитие на второто събираемо и от него да вземем стойността на c_{-1}:

$$-2i(z+i)\cos\frac{1}{z+i} = -2i(z+i)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= -2i(z+i)\left[1 - \frac{1}{2!}(z+i)^{-2} + \frac{1}{4!}(z+i)^{-4} + \ldots\right] =$$

$$= -2i(z+i) + i(z+i)^{-1} - \frac{i}{12}(z+i)^{-3} + \ldots.$$

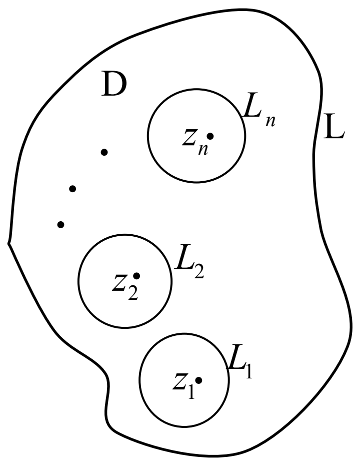
Следователно $\qquad \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = i.$

Теорема 1. (*Основна теорема за резидуумите*) Ако функцията $f(z)$ е еднозначна и аналитична в затворената област $\overline{D}$, заградена от контура L, с изключение на краен брой особени точки (полюси и съществени особени): $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащи вътре в D (но не на L), то интегралът от $f(z)$ по контура L, описан еднократно в положителна посока, е равен на произведението на $2\pi i$ и сумата от резидуумите на $f(z)$ в тези точки, т.е.

(8) $$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

(Може да се поиска непрекъснатост на $f(z)$ върху контура L, а аналитичност вътре в D с изключение на изброените особени точки).

Доказателство: Особените точки $z_1, z_2, ..., z_n$, лежащи вътре в D, заграждаме с окръжности $L_k \equiv |z - z_k| = \rho_k$ $\left(k = 1 \div n\right)$ с толкова малки радиуси, че да лежат вътре в D и да не се пресичат (черт. 2.61).



Черт. 2.61

Съгласно теоремата на Коши за многосвързана област (§ 9) е в сила равенството

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)dz .$$

От дефиницията на резидуум (1) имаме, че

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_k} f(z)dz$$

или

$$\oint_{L_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

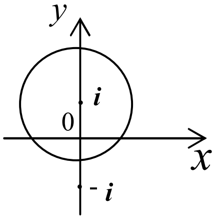
Съпоставяйки последното равенство с по-горното, получаваме, че

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) .$$

Пример 6. Пресметнете интеграла

$$\oint_L \left[\frac{\sin z}{z^2(z^2+1)^3} + z e^{\frac{1}{z}} \right] dz \text{, ако } L \equiv |z - i| = 1{,}5 .$$

Решение: Особените точки на подинтегралната функция са $z=0,\ z=i$ и $z=-i$.



Черт. 2.62

От тях вътре в областта, заградена от окръжността L, лежат $z=0$ и $z=i$. Особената точка $z=-i$ е извън затворения кръг $|z-i|\le 1{,}5$ и не влияе на стойността на интеграла (черт. 2.62).

Даденият интеграл се записва като сума от от два интеграла:

$$I_1=\oint_L \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)^3}dz \text{ и } I_2=\oint_L ze^{\frac{1}{z}}dz.$$

За I_1 точката $z=0$ е прост полюс, а $z=i$ е трикратен полюс. (Проверете!) Следователно

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{\sin z}{z^2(z^2+1)^3}\right]=\lim_{z\to 0} z\frac{\sin z}{z^2(z^2+1)^3}=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\sin z}{z}\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]=1;$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left[\frac{\sin z}{z^2(z^2+1)^3}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[\left(z-i\right)^3\frac{\sin z}{z^2(z+i)^3(z-i)^3}\right]''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[\frac{\sin z}{z^2(z+i)^3}\right]''=\frac{7}{16}\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1.$$

Следователно

$$I_1=2\pi i\left(1+\frac{7}{16}\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1\right)=\pi i\left(2+\frac{7}{8}\operatorname{ch}1-2\operatorname{sh}1\right).$$

За I_2 точката $z=0$ е съществена особена точка. Развиваме функцията $ze^{\frac{1}{z}}$ в ред на Лоран:

$$ze^{\frac{1}{z}} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = z\left(1+\frac{z^{-1}}{1!}+\frac{z^{-2}}{2!}+\ldots\right) = z+1+\frac{z^{-1}}{2!}+\frac{z^{-2}}{3!}+\ldots.$$

Следователно $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(ze^{\frac{1}{z}}\right) = c_{-1} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$.

Тогава $I_2 = 2\pi i\frac{1}{2} = \pi i$.

Окончателно

$$\oint_L\left[\frac{\sin z}{z^2\left(z^2+1\right)^3}+ze^{\frac{1}{z}}\right]dz = I_1+I_2 = \pi i\left(3+\frac{7}{8}\operatorname{ch}1-2\operatorname{sh}1\right).$$

Понятието *резидуум* се разпространява и в случая *на безкрайно отдалечената точка* $z=\infty$.

Предполагаме, че $z=\infty$ е изолирана особена точка на аналитичната функция $f(z)$, т.е. $f(z)$ е аналитична в някаква околност $|z|>r$ на безкрайно отдалечената точка.

Дефиниция 2. *Резидуум* на функцията $f(z)$ относно безкрайно отдалечената точка ($z=\infty$) се нарича интегралът

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^-} f(z)dz,$$

където L е затворен по части гладък контур, изцяло лежащ в околността $|z|>r$ на безкрайно отдалечената точка (напр. окръжността $|z|=R>r$), в която функцията $f(z)$ е аналитична; интегрирането по L се извършва в отрицателна посока, т.е. такава, че при описването на контура безкрайно отдалечената точка да остава отляво.

По такъв начин

(9) $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^-} f(z)dz .$$

В околността на безкрайно отдалечената точка, несъдържаща други особени точки на функцията $f(z)$ освен самата точка $z=\infty$, развитието на функцията $f(z)$ в ред на Лоран е следното:

(10) $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n .$$

Тъй като редът на Лоран на функцията $f(z)$ е равномерно сходящ върху контура L (§ 11), то този ред може да се интегрира почленно по кривата L.

Понеже за $k = 0,1,\pm 2,...$ интегралите $\oint_{L^-} z^k dz = 0$, а интегралът $\oint_{L^-} \frac{dz}{z} = -2\pi i$, то след интегрирането по кривата L на равенство (10) получаваме

$$\oint_{L^-} f(z)dz = -2\pi i c_{-1} ;$$

оттук

(11) $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} .$$

По такъв начин резидуумът на функцията $f(z)$ в безкрайно отдалечената точка е равен на коефициента при първата отрицателна степен в Лорановото развитие на тази функция в околността на $z=\infty$, взет с противоположен знак.

Използвайки това понятие, ще докажем следната теорема:

Теорема 2. Ако функцията $f(z)$ е аналитична в разширената комплексна равнина $\overline{Z}$ с изключение на краен брой изолирани особени точки, то сумата от всичките ѝ резидууми (включително и на резидуума в точката $z=\infty$) е нула.

Доказателство: Описваме централна окръжност $L \equiv |z| = R$ с толкова голям радиус R, че всички особени точки z_k ($k=1,2,...,n$) на функцията $f(z)$, с изключение на $z=\infty$, да лежат вътре в тази окръжност. Тогава по теорема 1 (основната теорема за резидуумите) имаме

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}} f(z)$$

или

(12) $$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz .$$

По дефиниция резидуумът в безкрайно отдалечената точка е

(13) $$\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} f(z)dz .$$

Събирайки (12) и (13), получаваме

(14) $$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}} f(z) + \underset{z=\infty}{\mathrm{Res}} f(z) = 0 .$$

Теоремата е доказана.

Равенство (14) можем да запишем така:

(15) $$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}} f(z) = -\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}} f(z) .$$

Получената зависимост (15) се оказва много удобна на практика, когато функцията $f(z)$ има голям брой крайни изолирани особени точки.

Пример 7. Пресметнете интеграла $\oint\limits_L \frac{z^5}{z^2-1}dz$, където $L \equiv |z| = 1{,}5$.

Решение: Вътре в областта, заградена от окръжността $|z| = 1{,}5$ се намират и двата прости полюса $z = \pm 1$ на подинтегралната функция $f(z) = \frac{z^5}{z^2-1}$.

I начин: Пресмятаме

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \left.\frac{z^5}{\left(z^2-1\right)'}\right|_{z=1} = \left.\frac{z^5}{2z}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{2}$.

Следователно $\oint\limits_L \frac{z^5}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi i$.

II начин: Разлагаме функцията $f(z)$ в ред на Лоран в околността на точката $z = \infty$

$$f(z) = \frac{z^5}{z^2-1} = \frac{z^5}{z^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)} = z^3\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = .$$

$$= z^3\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = z^3\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right) = z^3+z+\frac{1}{z}+\ldots.$$

Тъй като $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ е коефициентът при $\frac{1}{z}$, взет с противоположен знак, то имаме: $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$. Тогава $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 1$ (формула (15)).

Следователно $\oint\limits_L \frac{z^5}{z^2-1} dz = 2\pi i.1 = 2\pi i$.

Пример 8. Пресметнете $\oint\limits_L \frac{z^{15} dz}{\left(z^2+1\right)^2 \left(z^4+2\right)^3}$, където $L \equiv |z| = 2$.

Решение: Особените точки на подинтегралната функция $f(z)$ са нулите на знаменателя ѝ:

$\left(z^2+1\right)^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = i$ и $z_{3,4} = -i$ (двукратни полюси);

$$\left(z^4+2\right)^3 = 0 \Rightarrow z^4 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$

$(k = 0,1,2,3)$.

При $k = 0$ имаме $z_{5,6,7} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1+i)$, а при $k = 1$, съответно, $z_{8,9,10} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}(-1+i)$.

Останалите нули са комплексно спрегнати на получените: $z_{11,\,12,\,13}=\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}(1-i)$ и $z_{14,\,15,\,16}=\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}(-1-i)$.

Всички тези нули са 3-кратни полюси на подинтегралната функция.

Ясно е, че всичките особени точки лежат вътре в кръга $|z|<2$ и пресмятането на резидуумите им е свързано с големи изчисления. Функцията $f(z)$ можем да запишем във вида

$$f(z)=\frac{z^{15}}{z^{16}\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{z^4}\right)^3}=\frac{1}{z}\left(1+z^{-2}\right)^{-2}\left(1+2z^{-4}\right)^{-3}=$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{1!}z^{-2}+\frac{2.3}{2!}z^{-4}-\dots\right)\left(1-\frac{3}{1!}(2z^{-4})+\frac{3.4}{2!}(2z^{-4})^2\ -\dots\right),$$

откъдето се вижда, че точката $z=\infty$ е проста нула на функцията. Регулярната част на нейното разложение започва с члена $\dfrac{1}{z}$. Следователно $\underset{z=\infty}{\operatorname{Res}} f(z)=-1$. Тогава по формула (15) получаваме, че $\sum\limits_{k=1}^{16}\underset{z=z_k}{\operatorname{Res}} f(z)=1$ и оттук $\oint\limits_L\dfrac{z^{15}dz}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3}=2\pi i$.

Ще отбележим, че резидуумът на функцията относно безкрайно отдалечената точка се определя посредством коефициента на един от членовете в регулярната част на Лорановото разложение на тази функция, като в същото време резидуумът относно крайната точка се определя посредством коефициента на един от членовете в главната част (припомняме, че съвкупността от отрицателните степени в реда на Лоран образува регулярната част за точката $z=\infty$ и главната част за крайната точка). Оттук следва, че резидуумът относно точката $z=\infty$ може да е различен от нула и в този случай, когато тази точка не е особена, т.е. е правилна, докато резидуумът в крайната правилна точка е винаги равен на нула. Така напр. за функцията $f(z)=\dfrac{1}{z}$ точката $z=\infty$ е правилна (проста нула), обаче $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-1\neq 0$.

Приложение на резидуумите. Тук ще се спрем на приложенията на резидуумите и на основната теорема за резидуумите за пресмятането на някои класове реални интеграли.

1) *Интеграли от вида* $\int\limits_0^{2\pi} R\left(\sin x,\cos x\right)dx$

Ще разгледаме интеграли от вида $\int\limits_0^{2\pi} R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ или в по-общ вид $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} R\left(\sin x,\cos x\right)dx$, където $R(u,v)$ е рационална функция на аргументите си u и v, а $0\le x\le 2\pi$ или $\alpha\le x\le \alpha+2\pi$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Изразяваме $\sin x$ и $\cos x$ по формулите на Ойлер и правим полагането $e^{ix}=z$. Получаваме

(16)
$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\\[2ex] \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\dfrac{z+z^{-1}}{2}\end{cases}.$$

Замествайки (16) в подинтегралната функция, стигаме до рационалната функция

$$R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i},\ \frac{z+z^{-1}}{2}\right)=f(z).$$

От $e^{ix}=z$ имаме $x=\frac{1}{i}\ln z$ и $dx=\frac{1}{iz}dz$.

За да определим границите на интегриране по z, забелязваме, че когато x се мени от 0 до 2π (или от α до $\alpha+2\pi$), то точката $z=e^{ix}$ описва единичната окръжност $L\equiv|z|=1$. Следователно нашият интеграл $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx$ (или $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} R(\sin x,\cos x)dx$) ще се трансформира в $\oint\limits_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz}$, т.е. получаваме интеграл по затворения контур L, който се пресмята с помощта на основната теорема на резидуумите.

Пример 9. Да се пресметне интегралът $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-4\sin x}$.

Решение: Заместваме в интеграла първото равенство от (16) и $dx=\frac{1}{iz}dz$. Получаваме

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(5-4\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}=-\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2-5zi-2}.$$

Нулите на знаменателя се получават от квадратното уравнение $2z^2-5zi-2=0$. Те са $z_1=2i$ (извън кръга $|z|\le 1$) и $z_2=\frac{i}{2}$ (вътре в $|z|<1$). Изчисляваме

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}}\left(\frac{1}{2z^2-5zi-2}\right)=\frac{1}{(2z^2-5z\,i-2)'}\Bigg|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{1}{4z-5i}\Bigg|_{z=\frac{i}{2}}=$$

$$=\frac{1}{-3i}=\frac{i}{3}.$$

(Използвахме формула (6) за пресмятане на резидуума на подинтегралната функция в простия полюс $z_2=\frac{i}{2}$.)

Следователно

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5-4\sin x}=-\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2-5iz-2}=-2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{i}{2}\right)=-2\pi i\frac{i}{3}=\frac{2}{3}\pi.$$

Пример 10. Да се пресметне интегралът $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{\left(2+\sqrt{3}\ \cos x\right)^2}$.

Решение: Постъпваме така, както в пример 9. Получаваме

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(2+\sqrt{3}\,\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}=-4i\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(\sqrt{3}\ z^2+4z+\sqrt{3}\right)^2}.$$

Намираме корените на квадратното уравнение $\sqrt{3}\ z^2+4z+\sqrt{3}=0$: $z_{1,\,2}=\frac{-2\pm 1}{\sqrt{3}}$. Коренът $z_1=-\sqrt{3}$ е вън от кръга $|\,z\,|\le 1$, но $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ е вътре в $|\,z\,|<1$; при това $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ е двукратен полюс на подинтегралната функция. Пресмятаме

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\sqrt{3}}{3}}\left[\frac{z}{\left(\sqrt{3}z^2+4z+\sqrt{3}\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{3}}\left[\left(z+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\frac{z}{\sqrt{3}\left(z+\sqrt{3}\right)^2\left(z+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\right]'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{3}}\left[\frac{z}{\left(\ z+\sqrt{3}\ \right)^2}\right]'=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\left(z+\sqrt{3}\right)^2-2z\left(z+\sqrt{3}\right)}{\left(z+\sqrt{3}\right)^4}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\sqrt{3}-z}{\left(z+\sqrt{3}\right)^3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Следователно $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{\left(2+\sqrt{3}\ \cos x\right)^2}=$

$$=-4i\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(\sqrt{3}\ z^2+4z+\sqrt{3}\right)^2}=-4i2\pi i\frac{\sqrt{3}}{2}=4\pi\sqrt{3}\ .$$

Пример 11. Пресметнете интеграла $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^6 xdx$.

Решение: Ако в интеграла $\int_{-\pi}^{0} \sin^6 x\,dx$ положим $x = -t$, получаваме $\int_{\pi}^{0} \sin^6(-t)(-dt) = \int_{0}^{\pi} \sin^6 t\,dt$. Оттук става ясно, че $\int_{0}^{\pi} \sin^6 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 x\,dx$. От (16) и $dx = \frac{dz}{iz}$ получаваме

$$\int_{0}^{\pi} \sin^6 x\,dx = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^6 \frac{dz}{iz} = \frac{i}{2^7}\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^6}{z^7}dz.$$

Ясно е, че $z=0$ е 7- кратен полюс за подинтегралната функция. Тогава

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^6}{z^7}\right] = \frac{1}{6!}\lim_{z\to 0}\left[z^7\frac{\left(z^2-1\right)^6}{z^7}\right]^{(6)} =$$

$$= \frac{1}{6!}\lim_{z\to 0}\left[\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}z^{12-2k}\left(-1\right)^k\right]^{(6)} = -\frac{1}{6!}\binom{6}{3}6! = -\frac{6!}{3!3!} = -20\cdot$$

Следователно

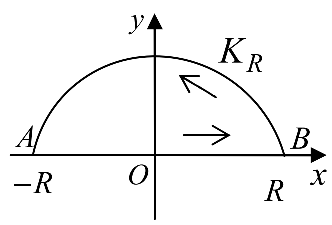
$$\int_{0}^{\pi} \sin^6 x\,dx = \frac{i}{2^7}\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^6}{z^7}dz = \frac{i}{2^7}2\pi i\left(-20\right) = \frac{5\pi}{16}.$$

2) *Интеграли от вида* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, в които $f(x)$ е рационална дроб

За да бъде сходящ този интеграл е достатъчно, знаменателят на $f(x)$ да няма реални нули и степента на числителя да бъде по-ниска от степента на знаменателя поне с две единици.

Теорията на резидуумите в тези примери се използва така: подинтегралната функция не се променя, но вместо реалната променлива x се въвежда комплексната променлива z. Получаваме функцията $f(z)$, която съвпада с $f(x)$ върху реалната ос Ox. От функцията $f(z)$ се взема интеграл по затворения контур L, образуван от горната полуокръжност K_R с радиус R и отсечката $AB: -R \le x \le R$ (черт. 2.63). При това радиусът R се избира толкова голям, че всички полюси на $f(z)$, разположени в горната полуравнина, т.е. с положителни имагинерни части, да лежат вътре в контура L. Тогава по основната теорема за резидуумите получаваме:

(17) $$\oint_L f(z)dz = \int_{K_R} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$



Черт. 2.63

при което резидуумите се вземат от всички полюси, лежащи вътре в полукръга, заграден от L. На диаметъра AB имаме $z = x$ и затова $\int_{AB} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx$. При $R \to \infty$ интегралът

(18) $$\int_{-R}^{R} f(x)dx \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Остава да докажем, че $\int_{K_R} f(z)dz \to 0$ при $R \to \infty$. Сега ще докажем не само това, но и едно по-общо твърдение.

Лема 1. Ако в горната полуравнина и на реалната ос функцията $f(z)$ е аналитична за всички z, достатъчно големи по модул ($|z| > R$), и ако при $|z| \to \infty$ величината $zf(z) \to 0$

равномерно[61] относно $\arg z$, то $\int\limits_{K_R} f(z)dz \to 0$ при $R \to \infty$, където K_R е горната полуокръжност с радиус R и с център координатното начало.

Доказателство: Каквото и $\varepsilon > 0$ да вземем, съществува такова число $M > 0$, че за всички z, за които $|z| = R > M$, функцията $f(z)$ е аналитична и се изпълнява неравенството $|zf(z)| < \varepsilon$. Затова, използвайки неравенството на Дарбу (свойство 4^0), § 9), получаваме

$$\left| \int\limits_{K_R} f(z)dz \right| = \left| \int\limits_{K_R} z f(z) \frac{1}{z} dz \right| \le \int\limits_{K_R} |zf(z)| \frac{1}{|z|} |dz| < \varepsilon \frac{1}{R} \pi R = \pi\varepsilon .$$

Оттук следва и верността на лемата.

И така, използвайки лема 1, отчитайки, че степента на числителя на $f(z)$ е поне с две единици по-ниска от степента на знаменателя, т.е. че $zf(z) \to 0$ при $z \to \infty$, и имайки предвид граница (18), правим граничен преход в равенство (17) при $R \to \infty$. Получаваме

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{K_R} f(z)dz + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

или

(19)
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) .$$

---

[61] Равномерното клонене на $zf(z)$ към нула се разбира в такъв смисъл, че за $\forall \varepsilon > 0$ съществува число $M > 0$, зависещо само от ε, такова че от неравенството $|z| > M$ следва неравенството $|zf(z)| < \varepsilon$ за всички z от горната полуравнина едновременно.

И така доказахме следната теорема:

Теорема 3. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(-\infty,+\infty)$, а функцията $f(z)$ съвпада с нея върху реалната ос и удовлетворява условията на лема 1. Тогава несобственният интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ е сходящ и е в сила равенство (19), където z_k са крайни полюси на функцията $f(z)$, които се намират в горната полуравнина.

Пример 12. Изчислете интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{\left(x^2+9\right)\left(x^2+1\right)^2}$.

Решение: Образуваме функцията $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+9\right)\left(z^2+1\right)^2}$

и намираме особените ѝ точки: $z_{1,2}=\pm 3i$, $z_{3,4}=i$ и $z_{5,6}=-i$. В горната полуравнина лежат простият полюс $z=3i$ и двукратният $z=i$. Намираме

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z)=\lim_{z\to 3i}\left[(z-3i)\frac{1}{(z-3i)(z+3i)\left(z^2+1\right)^2}\right]=-\frac{i}{384};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2\left(z^2+9\right)}\right]'=$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\left(z^2+9\right)^{-1}(z+i)^{-2}\right]'=$$

$$= \lim_{z\to i}\left[-\left(z^2+9\right)^{-2} 2z(z+i)^{-2} - 2(z+i)^{-3}\left(z^2+9\right)^{-1}\right] = -\frac{3}{128}i\,.$$

Следователно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+9\right)\left(x^2+1\right)^2} = 2\pi i\left(-\frac{i}{384} - \frac{3i}{128}\right) = \frac{5\pi}{96}\,.$$

Пример 13. Изчислете $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ (или пример 18, от който следва 13).

Решение: Тъй като подинтегралната функция е четна, то $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}\,.$

Образуваме функцията $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$, която удовлетворява условията на лема 1. Тази функция има два трикратни полюса $z = i$ и $z = -i$, но само първият лежи в горната полуравнина. Намираме

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^3 \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[(z+i)^{-3}\right]'' =$$

$$= \frac{1}{2}(-3)(-4)\lim_{z\to i}(z+i)^{-5} = 6(2i)^{-5} = \frac{6}{2^5 i} = -\frac{3}{16}i.$$

Следователно $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2} 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{16}\,.$

3) *Интеграли от вида* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx\,dx$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx\,dx$

В тях $f(x)$ е рационална дроб, а m е реална константа; можем да приемем, че $m>0$. За да бъдат сходящи тези интеграли, знаменателят на $f(x)$ не трябва да има реални нули, а степента на числителя трябва да бъде по-ниска от степента на знаменателя поне с една единица.

Вместо разглежданите два вида интеграли се въвежда интеграл от вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx$.

Ясно е, че

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mxdx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mxdx\,.$$

Въвеждаме функцията $\varphi(z)=f(z)e^{imz}$ на комплексната променлива z, която на реалната ос съвпада с функцията $f(x)e^{imx}$. Интегрираме функцията $\varphi(z)$ по контура L от пункт 2) (черт. 2.63), т.е. получаваме (17), но вместо $f(z)$ за подинтегрална функция имаме $\varphi(z)$. И тук

$$\int\limits_{AB} \varphi(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} \varphi(x)dx = \int\limits_{-R}^{R} f(x)e^{imx}dx \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx$$

при $R\to\infty$.

Остава да покажем, че $\int\limits_{K_R} \varphi(z)dz = \int\limits_{K_R} f(z)e^{imz}dz \to 0$ при $R\to\infty$. За тази цел ще използваме следната лема:

Лема 2. Ако в горната полуравнина и на реалната ос функцията $f(z)$ е аналитична за всички z, достатъчно големи по модул, и ако при $|z| \to \infty$ функцията $f(z) \to 0$ равномерно относно $\arg z$, то $\int\limits_{K_R} f(z)e^{imz}dz \to 0$ при $R \to \infty$, където K_R е горната полуокръжност с радиус R и с център координатното начало.

Доказателство: Комплексно параметричното уравнение на полуокръжноста K_R е $z = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$. Тогава

$$\int\limits_{K_R} f(z)e^{imz}dz = \int\limits_0^{\pi} f(\mathrm{R}\,e^{i\varphi})e^{im\mathrm{R}e^{i\varphi}}Rie^{i\varphi}d\varphi .$$

От $|e^{i\alpha}| = 1$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ имаме $|e^{i\varphi}| = 1$ и $\left|e^{imR\cos\varphi}\right| = 1$. От друга страна, тъй като по условие $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то за $\varepsilon > 0$ съществува число $M(\varepsilon) > 0$, такова че при $|z| = R > M$ имаме $|f(z)| < \varepsilon$. От казаното до тук следва, че $\left|f(\mathrm{R}\,e^{i\varphi})e^{imR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right| = \left|f(\mathrm{R}\,e^{i\varphi})\right|e^{-mR\sin\varphi} < \varepsilon e^{-mR\sin\varphi}$.

И така

$$\left|\int\limits_{K_R} f(z)e^{imz}dz\right| < \varepsilon R\int\limits_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}d\varphi .$$

Но

$$\int\limits_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi}d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}d\varphi = I_1 + I_2 .$$

В I_2 правим смяна на променливата φ с новата променлива t: $\varphi = \pi - t$. Тогава

$$I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-mR\sin(\pi-t)}d(-t)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin t}dt\,.$$

Следователно $I_2=I_1$ и $\left|\int\limits_{K_R}f(z)e^{imz}dz\right|<2\varepsilon R\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi$. Но, както знаем (виж [41]) в пример 5, § 9), $\sin\varphi\geq\frac{2}{\pi}\varphi,\;\;0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$. Тогава

$$\left|\int\limits_{K_R}f(z)e^{imz}dz\right|\leq 2\varepsilon R\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi=-\frac{2\varepsilon R}{mR\frac{2}{\pi}}e^{-mR\frac{2}{\pi}\varphi}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi\varepsilon}{m}(1-e^{-m\mathrm{R}})<\frac{\pi\varepsilon}{m}.$$

Тъй като ε е произволно малко положително число, то интегралът $\int\limits_{K_R}f(z)e^{imz}dz\to 0$ при $R\to\infty$.

Лемата е доказана.

Вече можем окончателно да запишем, че

(20) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{imx}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{imz}\right].$$

И така доказахме следната теорема:

Теорема 4. Ако функцията $\varphi(z)$ удовлетворява условията: а) $\varphi(z)=f(z)e^{imz}$, където $m>0$, $\operatorname{Im}z\geq 0$ и $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$; б) $f(z)$ е аналитична върху реалната ос и в) аналитична в горната полуравнина с изключение на краен брой полюси $z_1, z_2, ..., z_n$, то е в сила равенство (20).

От формула (20) могат да се получат редица формули.

Очевидно имаме

(21) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{imx}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{imx}dx\,.$$

В първия от интегралите в горната сума ще направим смяна на променливата x с t: $x = -t$. Имаме

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,e^{imx}dx = \int_{\infty}^{0} f(-t)\,e^{-imt}(-dt) = \int_{0}^{\infty} f(-t)\,e^{-imt}dt\,.$$

Тогава равенство (21) добива вида

(22) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{imx}dx = \int_{0}^{\infty}\left[f(x)e^{imx} + f(-x)\,e^{-imx}\right]dx\,.$$

Отчитайки (22), равенство (20) може да се запише така:

(23) $$\int_{0}^{\infty}\left[f(x)e^{imx} + f(-x)e^{-imx}\right]dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\operatorname{Res}}\left[f(z)\,e^{imz}\right].$$

Ще отбележим, че ако $f(x)$ е *четна функция*, то формула (23) приема следния вид

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\left(e^{imx} + e^{-imx}\right)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\operatorname{Res}}\left[f(z)e^{imz}\right]$$

или

(24) $$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos mx\,dx = \pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\operatorname{Res}}\left[f(z)\,e^{imz}\right].$$

Ако пък $f(x)$ е *нечетна функция*, то формула (23) ще се запише така:

$$\int_0^{\infty} f(x)\left(e^{imx}-e^{-imx}\right)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{imz}\right]$$

или

(25) $$\int_0^{\infty} f(x)\sin mx dx = \pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{imz}\right].$$

В сила е и следната теорема, която ще дадем без доказателство:

Теорема 5. Ако функцията $\varphi(z)$ удовлетворява условията а) и в) на теорема 4 и върху реалната ос има краен брой прости полюси $x_1, x_2, ..., x_s$, то

(26) $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\varphi(z)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{Res}_{x=x_k}\varphi(x)\right\}.$$

Пример 14. Да се пресметне интегралът $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Решение: Функцията $f(z)=\dfrac{z^2e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}$ има един двукратен полюс $z=i$ в горната полуравнина. Изчисляваме

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left[\frac{z^2e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left[\left(z-i\right)^2\frac{z^2e^{iz}}{\left(z-i\right)^2(z+i)^2}\right]'=$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{z^2e^{iz}}{(z+i)^2}\right]'=\lim_{z\to i}\left\{e^{iz}\left[\frac{2zi}{\left(z+i\right)^3}+i\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]\right\}=$$

$$=e^{-1}\left(\frac{-2}{-8i}+i\frac{-1}{-4}\right)==e^{-1}\left(\frac{-i}{4}+\frac{i}{4}\right)=0.$$

Оттук

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2e^{ix}}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=2\pi i.0=0.$$

Следователно $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=0$.

Пример 15. Пресметнете $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{\left(x^2+4\right)(x-1)}dx$.

Решение: Тук функцията $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{\left(z^2+4\right)(z-1)}$ има прост полюс $z=2i$ в горната полуравнина и прост полюс $z=1$ на реалната ос.

Ще приложим формула (26). Изчисляваме първо

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\left[\frac{e^{iz}}{\left(z^2+4\right)(z-1)}\right]=\left.\frac{\dfrac{e^{iz}}{(z-1)}}{\left(z^2+4\right)'}\right|_{z=2i}=\left.\frac{e^{iz}}{2z(z-1)}\right|_{z=2i}=$$

$$=\frac{e^{-2}}{4i(2i-1)}=-\frac{e^{-2}(2-i)}{20},$$

а след това

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left[\frac{e^{iz}}{\left(z^2+4\right)\left(z-1\right)}\right]=\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right)_{z=1}=\frac{e^i}{5}=\frac{\cos 1+i\sin 1}{5}.$$

Следователно $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{\left(x^2+4\right)\left(x-1\right)}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+4\right)\left(x-1\right)}dx+$

$$+i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{\left(x^2+4\right)\left(x-1\right)}dx=2\pi i\left[-\frac{e^{-2}}{20}(2-i)+\frac{1}{2}\,\frac{\cos 1+i\sin 1}{5}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{10}\left[\left(-e^{-2}-2\sin 1\right)+i\left(2\cos 1-2e^{-2}\right)\right].$$

И така $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{\left(x^2+4\right)\left(x-1\right)}dx=\frac{\pi}{5}\left(\cos 1-e^{-2}\right).$

Получихме също, че $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+4\right)\left(x-1\right)}dx=-\frac{\pi}{10}\left(2\sin 1+e^{-2}\right).$

Пример 16. Пресметнете $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$.

Решение: Въвеждаме функцията $\varphi(z)=\frac{ze^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}$. Точката $z=2i$ е двукратен полюс на функцията $\varphi(z)$, който лежи в горната полуравнина. Тогава

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\left[\frac{z\,e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}\right]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\left[\left(z-2i\right)^2\frac{ze^{3iz}}{\left(z-2i\right)^2\left(z+2i\right)^2}\right]'=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{z\,e^{3iz}}{\left(z+2i\right)^2}\right]'=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{3iz}\left[\left(1+3i\,z\right)\left(z+2i\right)^2-2z\left(z+2i\right)\right]}{\left(z+2i\right)^4}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}e^{3iz}\frac{3i\,z^2-7z+2i}{\left(z+2i\right)^3}=e^{-6}\frac{-24\,i}{-64\,i}=\frac{3}{8}\,e^{-6}.$$

Използваме формула (25) и получаваме, че

$$\int_0^\infty\frac{x\sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{3}{8}\pi\,e^{-6}.$$

Можеше да запишем $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x\sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{x\sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$,

тъй като подинтегралната функция е четна. Тогава

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{x\,e^{3ix}}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\int_{-\infty}^\infty\frac{x(\cos 3x+i\sin 3x\ )}{\left(x^2+4\right)^2}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\frac{x\cos 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx+i\int_{-\infty}^\infty\frac{x\sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx=2\pi i\frac{3}{8}e^{-6}=\frac{3}{4}\pi ie^{-6}.$$

Следователно $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{x\sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{3}{4}\pi\,e^{-6}$, а

$\int\limits_0^\infty \frac{x \sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2} dx = \frac{3}{8}\pi e^{-6}$. Освен това $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 3x}{\left(x^2+4\right)^2} dx \ = 0$, но това е очевидно, тъй като подинтегралната функция е нечетна, а интегралът е абсолютно сходящ и, освен това, е в симетрични граници.

Пример 17. Пресметнете интеграла на Дирихле $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение: Този интеграл беше пресметнат в пример 6, § 9. Сега ще дадем съвсем прост начин за пресмятане на същия интеграл, използвайки теорема 5. Образуваме функцията $\varphi(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Тя има един прост полюс $z = 0$, който лежи върху реалната ос, където $f(z) = f(x)$. Следователно $\operatorname*{Re}_{x=0} s\left(\frac{e^{ix}}{x}\right) = \left(e^{ix}\right)_{x=0} = 1$.

Тъй като подинтегралната функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ е четна в интервала $(-\infty, \infty)$, то $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Тогава $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} 2\pi i.1 = \pi i$. Или $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i$, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$, а $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Пример 18. Да се пресметне интегралът $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение: Функцията $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^{n+1}}$ удовлетворява условията на лема 1 и притежава ($n+1$)-кратни полюси $z=\pm i$, само единият от които е над реалната ос. Тогава

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\left[\left(z-i\right)^{n+1}\frac{1}{\left(z-i\right)^{n+1}\left(z+i\right)^{n+1}}\right]^{(n)}=$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\left[\left(z+i\right)^{-n-1}\right]^{(n)}=$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}(-1)^n(n+1)(n+2)...(n+n)(z+i)^{-2n-1}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}(n+1)(n+2)...2n(2i)^{-2n}(2i)^{-1}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}(n+1)(n+2)...2n\,\frac{1}{(-1)^n 2i\,2^{2n}}=$$

$$=\frac{1}{n!}(n+1)(n+2)...2n\,\frac{1}{2^{2n+1}i}=\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{1}{i}.$$

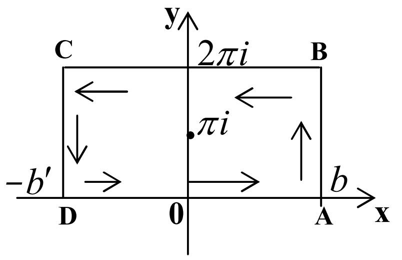
И така

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\,2\pi i\binom{2n}{n}\frac{1}{i2^{\,2n+1}}=\frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}.$$

Пример 19. Пресметнете $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1} dx$, ако $a = \alpha + i\beta$, $\alpha \in [0,1)$, $a = const$.

Решение: Даденият интеграл е абсолютно сходящ, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{e^{ax}}{e^x+1} \right| dx < \infty$. За да го изчислим, ще приложим теоремата за резидуумите върху интеграла $\oint\limits_L \frac{e^{az}}{e^z+1} dz$, където L е контура на правоъгълника $ABCDA$ със страни $x = -b'$, $x = b$, $(b, b' > 0)$, $y = 0$ и $y = 2\pi$ (черт. 2.64). Вътре в този правоъгълник подинтегралната функция $f(z) = \frac{e^{az}}{e^z+1}$ има една единствена особена точка $z = \pi i$, която е проста нула на знаменателя и следователно прост полюс на $f(z)$. Понеже



Черт. 2.64

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi i} f(z) = \left. \frac{e^{az}}{\left(e^z+1\right)'} \right|_{z=\pi i} = \left. \frac{e^{az}}{e^z} \right|_{z=\pi i} = -e^{i\pi a},$$

то

$$\textbf{(27)} \qquad \oint\limits_L \frac{e^{az}}{e^z+1} dz = -2\pi i e^{i\pi a}.$$

От друга страна, интегралът в лявата част на равенство (27) се записва като сума от четири интеграла:

$$\oint_L = \int_{DA} + \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} .$$

Лесно се вижда, че

(28) $$\int_{DA} + \int_{BC} =$$

$$= \int_{-b'}^{b} \frac{e^{ax}}{e^x+1}dx - \int_{-b'}^{b} \frac{e^{2\pi ai}}{e^x+1}e^{ax}dx = \left(1-e^{2\pi ai}\right)\int_{-b'}^{b} \frac{e^{ax}}{e^x+1}dx .$$

(Комплексно параметричното уравнение на DA е $z = x$ $(-b' \le x \le b)$, а на $CB \equiv z = x + 2\pi i$ $(-b' \le x \le b)$. Освен това $e^{2\pi i} = 1$).

За останалите два интеграла ще докажем, че клонят към нула, когато $b \to \infty$ и $b' \to \infty$. Наистина, върху AB имаме $z = b + iy$ $(0 \le y \le 2\pi)$ и

$$\left|\frac{e^{az}}{e^z+1}\right| = \left|\frac{e^{(\alpha+i\beta)(b+iy)}}{e^{b+iy}+1}\right| \le \frac{e^{\alpha b-\beta y}}{e^b-1} \le \frac{e^{\alpha b+2\pi|\beta|}}{e^b-1}.$$

Тогава

(29) $$\left|\int_{AB}\frac{e^{az}}{e^z+1}dz\right| \le 2\pi\,\frac{e^{\alpha b+2\pi|\beta|}}{e^b-1} = 2\pi e^{2\pi|\beta|}\frac{e^{\alpha b}}{e^b-1}.$$

Също върху CD имаме $z = -b' + iy$ ($0 \le y \le 2\pi$). Тогава

$$\left|\frac{e^{az}}{e^z+1}\right| = \left|\frac{e^{(\alpha+i\beta)(-b'+iy)}}{e^{-b'+iy}}\right| \le \frac{e^{-\alpha b'-\beta y}}{1-e^{-b'}} \le \frac{e^{-\alpha b'+2\pi|\beta|}}{1-e^{-b'}} ,$$

а

(30) $$\left|\int_{CD}\frac{e^{az}}{e^z+1}dz\right| \le 2\pi e^{2\pi|\beta|}\,\frac{e^{-\alpha b'}}{1-e^{-b'}}.$$

От (29) и (30) при $b, b' \to \infty$ непосредствено следва нашето твърдение, че интегралите по AB и CD клонят към нула, понеже $\alpha = const$ и $\alpha \in [0,1)$.

И така от (27) - (30) след граничен преход при $b, b' \to \infty$ получаваме

$$\left(1-e^{2a\pi i}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^{x}+1}dx=-2\pi i e^{i\pi a}$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^{x}+1}dx=2\pi i\frac{e^{i\pi a}}{e^{2a\pi i}-1}=\pi\frac{1}{\dfrac{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}}{2i}}=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$a=\alpha+i\beta$, $0<\alpha<1$.

Ако положим $x=\ln t$, последният интеграл добива вида:

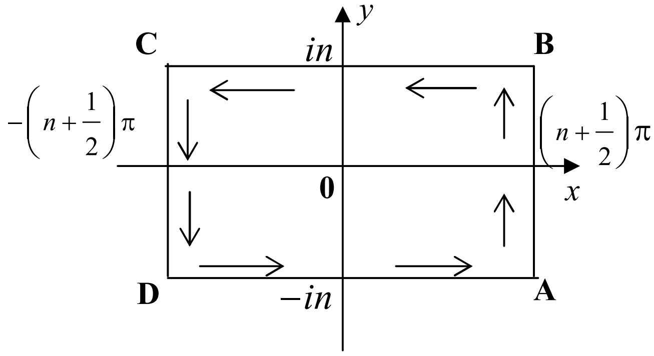
$$\int_{0}^{\infty}\frac{t^{a-1}}{t+1}dt=\frac{\pi}{\sin a\pi}\quad (a=\alpha+i\beta,\ 0<\alpha<1).$$

Като последен пример тук ще изведем така нареченото разлагане на дробната функция $\operatorname{cotg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ в сбор от елементарни дроби:

Пример 20. За тази цел ще разгледаме линейния интеграл

$$I_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_n}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z}\right)\operatorname{cotg} z\,dz=\frac{a}{2\pi i}\oint_{L_n}\frac{\operatorname{cotg} z}{z(z-a)}dz,$$

взет по контура L_n на правоъгълник със страни $x=\pm\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $y=\pm n$, където $n\in\mathbb{N}$ (черт. 2.65). Предполагаме при това, че константата a е различна от полюсите на $\operatorname{cotg} z$ и че $n>|a|$; следователно вътре в L_n единствените особени точки на подинтегралната функция $\left(\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{1}{z}\right)\operatorname{cotg} z=\dfrac{a\cos z}{z\left(z-a\right)\sin z}$ са



Черт. 2.65

полюсите $z=0$, $z=a$ и $z=k\pi$ $(k=0,\pm1,\dots,\pm n)$, от които само полюсът $z=0$ е двукратен, а останалите са прости. На тези полюси отговарят резидуумите:

$$\operatorname{Res}(a)=\operatorname{cotg}a;\quad \operatorname{Res}(0)=\lim_{z\to0}\left[z^2\frac{a\cos z}{z(z-a)\sin z}\right]'=$$

$$=a\lim_{z\to0}\left(\frac{z}{z-a}\operatorname{cotg}z\right)'=$$

$$=a\lim_{z\to0}\left[-\frac{a}{(z-a)^2}\operatorname{cotg}z-\frac{z}{z-a}\frac{1}{\sin^2 z}\right]=$$

$$=-a\lim_{z\to0}\frac{a\sin z\cos z+z(z-a)}{(z-a)^2\sin^2 z}=$$

$$=-\frac{1}{a}\lim_{z\to0}\frac{\frac{1}{2}a\sin 2z+z^2-az}{z^2}=-\frac{1}{a}\lim_{z\to0}\frac{a\cos 2z+2z-a}{2z}=$$

$$=-\frac{1}{2a}\lim_{z\to0}\left(-2a\sin 2z+2\right)=-\frac{1}{a}.$$

$$\operatorname{Re}s(k\pi) = \left.\frac{\dfrac{a\cos z}{z(z-a)}}{(\sin z)'}\right|_{z=k\pi} = \left.\frac{a\cos z}{z(z-a)\cos z}\right|_{z=k\pi} = \frac{a}{k\pi(k\pi-a)} =$$

$$= \frac{1}{k\pi-a} - \frac{1}{k\pi} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n).$$

Следователно

(31) $$I_n = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \left[\operatorname{cotg} a - \frac{1}{a} + \sum_{k=-n}^{n}{}' \left(\frac{1}{k\pi-a} - \frac{1}{k\pi} \right) \right] =$$

$$= \operatorname{cotg} a - \frac{1}{a} - \sum_{k=-n}^{n}{}' \left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k\pi-a} \right),$$

където “примът” след знака $\sum$ означава, че на индекса за сумиране k трябва да се дават всички цели стойности от $-n$ до n с изключение на 0.

Сега ще покажем, че $I_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Достатъчно е за тази цел да докажем, че съществува една независеща от n константа $M > 0$, такава че $|\operatorname{cotg} z| < M$, когато z остава върху коя да е от отсечките на контура L_n. И наистина за $\forall z \in L_n$ (чиято дължина е $l_n = 4n + 2(2n+1)\pi$) имаме $|z| \geq n,\ |z-a| \geq n - |a|$.

Следователно

$$|I_n| \leq \left[4n + 2(2n+1)\pi\right] \frac{M|a|}{n(n-|a|)} \frac{1}{2\pi}$$

и намерената горна граница за I_n клони очевидно към нула заедно с $\frac{1}{n}$.

Да определим най-напред една горна граница на $|\cot gz|$ върху отвесните страни AB и CD на правоъгълника L_n. При $z = x + iy$ имаме

(32) $$|\operatorname{cotg} z|^2 = \left|\frac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)}\right|^2 = \left|\frac{\cos(x+iy)\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)\sin(x+iy)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos 2iy + \cos 2x}{\cos 2iy - \cos 2x}\right| = \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}.$$

Понеже $x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ върху AB и CD, то

$$|\operatorname{cotg} z|^2 = \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{e^{2y} + e^{-2y} + 2} < 1.$$

Ако сега z лежи върху хоризонталните страни BC и DA, то $y = \pm n$ и от равенства (32) заключаваме, че

$$|\operatorname{cotg} z|^2 \le \frac{e^{2n} + e^{-2n} + 2}{e^{2n} + e^{-2n} - 2} = \left(\frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{e^{2n} - 1}\right)^2 < 4.$$

Оттук е ясно, че върху четирите страни на контура L_n имаме $|\operatorname{cotg} z| < 2$, така че за горната граница M на $|\operatorname{cotg} z|$ върху L_n можем да вземем числото 2. С това е доказано, както изтъкнахме по-горе, че $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$; или, като вземем пред вид равенство (31), получаваме

(33) $$\operatorname{cotg} a = \frac{1}{a} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n}{}' \left(\frac{1}{a - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right).$$

Понеже двата реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right)$ и $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{a-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right)$ са сходящи (абсолютно), то можем да запишем равенство (33) по следния начин (като заместим a със z):

(34) $$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right)$$

или още

(35) $$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} \right).$$

Формули (34) и (35) са изведени при единственото предположение, че z е различно от полюсите на $\operatorname{cotg} z$ (т.е. не е кратно на π). Формула (34) представлява разложението на $\operatorname{cotg} z$ в сбор от "елементарни дроби". Формула (35) ни дава възможност да получим аналогично развитие напр. за $\operatorname{tg} z$. Наистина

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg} z - 2\operatorname{cotg} 2z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \frac{k^2\pi^2}{4}} =$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \frac{(2m-1)^2\pi^2}{4}} =$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - \frac{(2m-1)\pi}{2}} + \frac{1}{z + \frac{(2m-1)\pi}{2}} \right],$$

което е валидно за $\forall z$, различно от полюсите на $\operatorname{tg} z$.

Задачи

I. Да се пресметнат резидуумите във всички крайни особени точки на функциите:

1) $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\dfrac{\pi}{4}z^2}$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=0;\operatorname{Res}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{16}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi^2}{16}$

2) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ **отг.** $\operatorname{Res}(-1)=-\dfrac{17}{54}e^{-1};\operatorname{Res}(2)=\dfrac{e^2}{27}$

3) $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$

отг. $\operatorname{Res}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\dfrac{1}{4}e^{-\frac{3\pi i}{4}};\operatorname{Res}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)=\dfrac{1}{4}e^{\frac{3\pi i}{4}};$

$\operatorname{Res}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)=\dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}};\ \operatorname{Res}\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)=\dfrac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}}$

4) $f(z)=\dfrac{z^3}{z^4+1}$ **отг.** $\operatorname{Res}\left[\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\right]=\dfrac{1}{4}$

5) $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=0$

6) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ **отг.** $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0;\ \operatorname{Res}(0)=-\dfrac{2}{\pi}$

7) $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$ **отг.** $\operatorname{Re}s(0)=0;\ \operatorname{Re}s\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{\pi};$

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\frac{-8}{\pi^2(2k+1)(4k+1)}\ (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

8) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ **отг.** $\operatorname{Re}s(0)=\dfrac{1}{24}$

9) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$ **отг.** $\operatorname{Re}s(0)=-\dfrac{1}{6};\ \operatorname{Re}s(3)=\dfrac{2}{27}\sin^2\dfrac{3}{2}$

10) $f(z)=\dfrac{z^5}{z^6+1}$ **отг.** $\operatorname{Re}s\left(e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}i}\right)=\dfrac{1}{6}\ \ (k=0\div5)$

11) $f(z)=\dfrac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$

отг. $\operatorname{Re}s\left[(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right]=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{6}+2n\pi}, & k=2n\\ \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\,e^{-\frac{\pi}{6}+(2n-1)\pi}, & k=2n-1\end{cases}$

$$\operatorname{Re}s\left[(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi\right]=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\,e^{-\frac{\pi}{6}+2n\pi}, & k=2n\\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{6}+(2n-1)\pi}, & k=2n-1\end{cases}$$

$$(n,k=0,\pm1,...)$$

12) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$ **отг.** $\operatorname{Res}(-1)=\dfrac{1}{27}$; $\operatorname{Res}(2)=-\dfrac{1}{27}$

13) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$

отг. $\operatorname{Res}(\pm i)=\dfrac{-1\pm 3i}{20}\cos 1$; $\operatorname{Res}(3)=\dfrac{\operatorname{ch} 3}{10}$

14) $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$ **отг.** $\operatorname{Res}(2)=-\dfrac{143}{24}$

15) $f(z)=\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{z^4+1}$

отг. $\operatorname{Res}(0)=0$; $\operatorname{Res}\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)=-\dfrac{(1+i)\sqrt{2}}{8}e^{i}$;

$\operatorname{Res}\left(e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)=\dfrac{(1-i)\sqrt{2}}{8}e^{-i}$; $\operatorname{Res}\left(e^{\frac{5\pi}{4}i}\right)=\dfrac{(1+i)\sqrt{2}}{8}e^{i}$;

$\operatorname{Res}\left(e^{\frac{7\pi}{4}i}\right)=\dfrac{(-1+i)\sqrt{2}}{8}e^{-i}$

16) $f(z)=z^3+\cos^2\dfrac{1}{z}$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=0$

17) $f(z)=\dfrac{1}{z\left(1-e^{2z}\right)}$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Res}(i\pi k)=\dfrac{i}{2\pi k}$

$(k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$

18) $f(z)=\operatorname{cotg} z^2$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=0;\ \operatorname{Res}\left(\pm\sqrt{k\pi}\right)=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{k\pi}}$
$(k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$

19) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)(z+3)}$

отг. $\operatorname{Res}(-1)=-\dfrac{e^{-i}}{4};\ \operatorname{Res}(1)=\dfrac{e^{i}}{8};\ \operatorname{Res}(-3)=\dfrac{e^{-3i}}{8}$

20) $f(z)=\operatorname{cotg}^2 z$ **отг.** $\operatorname{Res}(k\pi)=0\ \ (k=0,\pm 1,\ldots)$

21) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=0$

22) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z}}$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(2n+1)!}$

23) $f(z)=\dfrac{e^{z}}{z^2\left(z^2+9\right)}$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=\dfrac{1}{9};\ \operatorname{Res}(\pm 3i)=\dfrac{\pm i}{54}e^{\pm 3i}$

24) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$ **отг.** $\operatorname{Res}(-1)=-\cos 1$

25) $f(z)=\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$

отг. $\operatorname{Res}(-3)=-\sin 2\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\right]$

26) $f(z)=\sin z\sin\dfrac{1}{z}$ **отг.** $\operatorname{Res}(0)=0$

27) $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$ **отг.** $\operatorname{Res}(\pm i)=\mp\dfrac{3i}{16}$

28) $f(z)=\operatorname{cth}^2\pi z$ **отг.** $\operatorname{Re}s(ki)=0 \ \ (k=0,\pm 1,\ldots)$

29) $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$ **отг.** $\operatorname{Re}s(1)=-e^{-1}$

30) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z}$

отг. $\operatorname{Re}s(0)=\dfrac{1}{2};\ \operatorname{Re}s(1)=-2;\ \operatorname{Re}s(2)=\dfrac{5}{2}$

31) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$

отг. $\operatorname{Re}s\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=(-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \ (k=0,\pm 1,\ldots)$

32) $f(z)=\dfrac{\cos 4z}{z(z-2)^6}$

отг. $\operatorname{Re}s(2)=-\dfrac{419}{192}\cos 8-\dfrac{367}{120}\sin 8;\ \operatorname{Re}s(0)=\dfrac{1}{64}$

33) $f(z)=\dfrac{z^4+z}{z^6-1}$

отг. $\operatorname{Re}s\left(\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{1}{6}\left(1\pm i\sqrt{3}\right);\ \operatorname{Re}s(1)=\dfrac{1}{3}$

(Другите особени точки z_k са отстраними и $\operatorname{Re}s(z_k)=0$.)

34) $f(z)=\dfrac{z^2}{z-1}\sin\dfrac{1}{z}$ **отг.** $\operatorname{Re}s(1)=\sin 1;\ \operatorname{Re}s(0)=1-\sin 1$

II. Да се пресметне резидуумът в безкрайно отделечената точка на функциите:

1) $f(z)=\dfrac{z^{10}}{(z+1)^7}$ **отг.** $-C_{10}^4=-\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}=-210$

2) $f(z)=\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+3)^3}$ **отг.** -1

3) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$ **отг.** 0

4) $f(z)=z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$ **отг.** π^2

5) $f(z)=\dfrac{z^4+z}{z^6-1}$ **отг.** 0

6) $f(z)=\dfrac{z^2}{z-1}\sin\dfrac{1}{z}$ **отг.** -1

7) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2+9}$ **отг.** $-\dfrac{1}{3}\operatorname{sh}3$

8) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ **отг.** 0

9) $f(z)=\dfrac{(z^{10}+1)\cos\frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$ **отг.** -1

10) $f(z)=\cos\pi\dfrac{z+2}{2z}$ **отг.** π

III. С помощта на теоремата за резидуумите да се пресметнат интегралите в § 10 и по-долу дадените, като кривата на интегриране е описана еднократно в положителна посока:

1) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{e^z-1}{z^2+z}dz$ **отг.** $2\pi i\left(1-e^{-1}\right)$

2) $\oint\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\,dz$ **отг.** $-4\pi i$

3) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$ **отг.** $\dfrac{\pi}{e}$

4) $\oint\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \left(\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}+z^2\cos\dfrac{1}{z}\right)dz$ **отг.** $2\pi i\left(1-e^{-1}\right)$

5) $\oint\limits_{|z-1-i|=1} \dfrac{\sin\pi(z-1)}{z^2-2z+2}dz$ **отг.** $\pi i \operatorname{sh}\pi$

6) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}dz$ **отг.** $-\dfrac{2}{3}\pi i$

7) $\oint\limits_{L} \dfrac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$; $L \equiv x^2+y^2=2x+2y$ **отг.** $-\dfrac{\pi i}{2}$

8) $\oint\limits_{|z-1|=5} \dfrac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)(z+3)^2}dz$ **отг.** $\dfrac{\pi^2 i}{4}$

9) $\oint\limits_{L} \dfrac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^3}dz$; $L \equiv x^2+4y^2=4$ **отг.** $\dfrac{3\pi^2 i}{4}$

10) $\oint\limits_{|z-2i|=1} \left[\dfrac{z}{\left(z^2+4\right)\left(z^3+8i\right)}+\operatorname{sh}\dfrac{i}{2z-4i}\right]dz$ **отг.** $-\dfrac{47}{48}\pi$

11) $\oint\limits_L \frac{dz}{z^4+1}$; $L \equiv x^2+y^2=2x$ **отг.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$

12) $\oint\limits_{|z|=1} \left(z^2 \sin\frac{1}{z} + z^3 \sin z\right) dz$ **отг.** $-\frac{\pi i}{3}$

13) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \left[(z+1)e^{\frac{1}{z}} + e^{z^2}\cos z\right] dz$ **отг.** $3\pi i$

14) $\oint\limits_{|z|=5} \left(\frac{\mathrm{sh}2z-2z}{z^2\mathrm{sh}^2\frac{iz}{3}} + z^2 e^{\frac{1}{z-3}}\right) dz$ **отг.** $\frac{\pi i}{3}$

15) $\oint\limits_{|z+7i|=2} \left[\frac{\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}}-i} - 8\frac{\cos\frac{\pi z}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right] dz$ **отг.** 0

16) $\oint\limits_{|z|=1} \left(\frac{e^{2z}-2z-1}{z\,\mathrm{sh}^2 4iz} + z\,\mathrm{ch}\frac{2i}{2z-i}\right) dz$

отг. $i\left(\frac{4}{\pi}\mathrm{ch}\frac{\pi}{2} - 2\mathrm{sh}\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\right)$

17) $\oint\limits_L \frac{z^2+1}{z^2(2z+3)^2} dz$; $L \equiv x^2+4y^2=4$ **отг.** 0

18) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2\cos z} dz$ **отг.** $2\pi i - \frac{16}{\pi} i\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}$

19) $\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin\frac{1}{z^2} + e^{z^2}\cos z\right)dz$ **отг.** 0

20) $\oint\limits_{|z|=\pi} \operatorname{tg} nz dz \ \left(n = 1, 2, ...\right)$ **отг.** $-4\pi i$

21) $\oint\limits_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z \, dz$ **отг.** 0

22) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)\left(z^5-1\right)}$ **отг.** $-\frac{\pi i}{121}$

(***Упътване***: Използвайте, че сумата от резидуумите е равна на $-\operatorname{Res}(\infty)$.)

23) $\oint\limits_{|z|=3} \left(1+z+z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$ **отг.** $32\pi i$

24**)** $\oint\limits_{|z|=5} \frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}$ **отг.** 0

25) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$ **отг.** $\frac{\pi}{2}\left[\cos 1 + \sin 1 + i\left(\sin 1 - \cos 1\right)\right]$

26) $\oint\limits_{L} \frac{e^{2z}}{z^3-1}dz$; $L \equiv x^2 + y^2 - 2x = 0$ **отг.** $\frac{2}{3}\pi i e^2$

27) $\oint\limits_{L} \frac{z\sin z}{(z-1)^5}dz$; $L \equiv \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ **отг.** $\frac{\pi i}{12}\left(\sin 1 - 4\cos 1\right)$

28) $\oint\limits_{L} \frac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}$; $L \equiv x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$ **отг.** 0

29) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2\,dz}{\sin^3 z\cos z}$ **отг.** $2\pi i$

30) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \left[z^3\sin\frac{1}{z} + \frac{e^z}{z^2\left(z^2-9\right)} \right] dz$ **отг.** $-\dfrac{2\pi i}{9}$

31) $\displaystyle\oint\limits_{L} \frac{\operatorname{tg} z}{z-1}\,dz$; L е ромб с върхове в точките $z_1 = 2;\ z_2 = i;$ $z_3 = -2;\ z_4 = -i$ **отг.** $2\pi i\left(\operatorname{tg}1 - \dfrac{8}{\pi^2-4} \right)$

32) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \left(\frac{z^3}{4z^4+1} + z^3\cos\frac{1}{z} \right) dz$ **отг.** $\dfrac{7\pi i}{12}$

33) $\displaystyle\oint\limits_{L} \left[z\sin\frac{1}{z^2} + \frac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3} \right] dz$; L е правоъгълник с върхове в точките $1+i;\ -1+i;\ 1-2i;\ -1-2i$ **отг.** $2i\dfrac{\pi^3-8}{\pi^2}$

34) $\displaystyle\oint\limits_{L} \frac{z\,e^{2z}}{z^4+8z^2-9}\,dz;\ L \equiv |\,z+i\sqrt{2}\,| = 2$ **отг.** $\dfrac{\pi i}{10}\left(2\operatorname{ch}2 - e^{-6i}\right)$

35) $\displaystyle\oint\limits_{L} \frac{dz}{e^{\pi i z^3}+1};\ L \equiv \left| z - \frac{1}{10} \right| = 1$ **отг.** 0

36) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \left[\frac{z+1}{e^z+1} + (z+1)\left(e^z+1\right) \right] dz$ **отг.** $-4\pi i$

37) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\ln(z+2)}{\sin z}dz$ **отг.** $2\pi i\ln 2$

38) $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$ **отг.** i

39) $\oint\limits_{|z|=1} \left(\frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z} + \frac{6z-\sin 6z}{z^2\operatorname{sh}^2 2z} \right)dz$ **отг.** $18\pi i$

40) $\oint\limits_{|z|=3} \left(\frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z} + \frac{\cos z^2-1}{z^4} \right)dz$ **отг.** $4\pi i$

41) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4\operatorname{sh}\frac{4z}{3}}dz$ **отг.** $16\pi i$

42) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$ **отг.** $-\frac{2}{3}\pi i$

43) $\oint\limits_{|z+3|=2} \left[|z+3|e^{z+3} - 4\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2(z+4)} \right]dz$ **отг.** 2π

44) $\oint\limits_{|z-7i|=2} \left(\frac{z}{e^{\frac{\pi z}{2}}+i} + z^2 + \operatorname{Re} z \right)dz$ **отг.** $4i(\pi-7)$

45) $\oint\limits_{|z|=3}\left[\dfrac{\operatorname{tg} z}{(z-2)^3}+z^2 e^{\frac{1}{z-2}}\right]dz$

отг. $2\pi i\left[\dfrac{\sin 2}{\cos^3 2}+\dfrac{8}{(4-\pi)^3}+\dfrac{8}{(4+\pi)^3}+\dfrac{37}{6}\right]$

46) $\oint\limits_{L}\dfrac{e^{2z}-1-2z}{z(z+1)^2\operatorname{sh} 4iz}dz$; $L\equiv x^2+y^2+y=2$

отг. $32\left[\dfrac{\frac{\pi}{2}-1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{(\pi-4)^2}-\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1-\frac{\pi}{2}}{(\pi+4)^2}\right]+$

$+\dfrac{2\pi}{\sin^2 4}\left[\left(3e^{-2}-1\right)\sin 4+4\left(e^{-2}+1\right)\cos 4\right]$

47) $\oint\limits_{|z|=1}\left(z\cos^2\dfrac{1}{z}+|z|e^z\right)dz$ **отг.** $-2\pi i$

48) $\oint\limits_{|z-2|=4}\left[\dfrac{\sin z-z}{z^3(z-1)^2}+z^2\cos\dfrac{1}{z-1}\right]dz$

отг. $2\pi i(\cos 1-3\sin 1+1)$

49) $\oint\limits_{L}\left[\dfrac{\operatorname{cotg} z}{z(z-1)}+e^{\frac{z}{1-z}}\right]dz$; $L\equiv x^2-2x+y^2=3$

отг. $2\pi i\left(\operatorname{cotg} 1-1-\dfrac{1}{e}\right)$

50) $\oint\limits_{|z|=4}\left[\dfrac{\operatorname{sh} z-e^{z}+1}{z^{3}\left(e^{z}+1\right)}+\dfrac{e^{\frac{2z}{z-1}}}{z-1}\right]dz$ **отг.** $\dfrac{\pi i}{2}\left(4e^{2}-1\right)$

51) $\oint\limits_{|z-1+i|=3}\left[\dfrac{\sin z^{3}}{(1-\cos z)(z-\pi)^{2}}+z^{2}\operatorname{sh}\dfrac{i}{z+i}\right]dz$

отг. $\dfrac{7}{3}\pi+3i\pi^{3}\cos\pi^{3}$

52) $\oint\limits_{L}\left[\dfrac{2}{z^{4}+1}+\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^{3}(z+1)}\right]dz$; $L\equiv x^{2}+y^{2}=2x$

отг. $\dfrac{\pi i}{2}\left(\pi-2\sqrt{2}\right)$

53) $\oint\limits_{|z|=2}\left[\dfrac{\cos 2z-1+2z^{2}}{z^{4}\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{3}}+z\operatorname{ch}\dfrac{1}{z+i}\right]dz$ **отг.** $(\pi+4)i$

Решете същата задача, но нека сега кривата на интегриране е окръжността $|z|=4$ **отг.** $4i\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{46-\operatorname{ch}6}{27}\right)$

54) $\oint\limits_{|z|=0,2}\left(\dfrac{\operatorname{ch}2z-\cos 2z}{z^{3}\sin 8z}+z\sin\dfrac{i}{z^{2}}\right)dz$ **отг.** -2π

55) $\oint\limits_{|z+5|=2}\left[z\cos\dfrac{1}{z+5}-2\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi iz}{4}}{(z+4)^{2}(z+2)}\right]dz$ **отг.** $-2\pi i$

56) $\oint\limits_{|z|=2}\left(\dfrac{e^{2z^2}-1}{z^4}+\dfrac{\sin^2 z}{z\cos z}\right)dz$ **отг.** $-8i$

57) $\oint\limits_{|z-2i|=3}\left[\dfrac{2\operatorname{sh}\dfrac{\pi iz}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{(z-i)^3(z+3)}\right]dz$

отг. $\dfrac{\pi^2}{50}(-21+22i)$

58) $\oint\limits_{|z|=1}\left(\dfrac{ze^{\frac{1}{z}}-z-1}{z^3}+\dfrac{\operatorname{sh}3z-\sin 3z}{z^3\operatorname{sh}2z}\right)dz$ **отг.** $9\pi i$

59) $\oint\limits_{L}\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z+1)^3}dz$; $L\equiv |z+1-i|=\sqrt{2}$ **отг.** $\dfrac{\pi}{4}(1-i)$

60) $\oint\limits_{|z-2i|=2}\left[\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi iz}{2+4i}}{(z-1-2i)^3(z-3-2i)}-z\operatorname{sh}\dfrac{1}{z-2i}\right]dz$

отг. $\dfrac{\pi^2}{20}(2+i)+4\pi$

61) $\oint\limits_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=1}\left[\dfrac{\sin z-z}{z^3\operatorname{sh}z}+z^2\operatorname{sh}\dfrac{2}{z-i}\right]dz$ **отг.** $-\dfrac{5\pi i}{3}$

62) $\oint\limits_{|z-1|=2}\left[z\cos iz+5\dfrac{\sin z-z}{z^4(z-1)^2}\right]dz$

отг. $10\pi i\left(\cos 1-4\sin 1+\dfrac{17}{6}\right)$

63) $\oint\limits_{|z+4|=2}\left[z\sin\dfrac{1}{z+4}+2\dfrac{\sin\dfrac{\pi z}{6}}{(z+3)^2(z+1)}\right]dz$ **отг.** $-7\pi i$

64) $\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{z-\operatorname{sh} z}{z^4(z-1)^2}dz$ **отг.** $2\pi i\left(4\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1-\dfrac{19}{6}\right)$

65) $\oint\limits_{|z+1|=1{,}5}\dfrac{e^z-z^2-z-1}{z^3\left(z^2-1\right)(z+1)}dz$ **отг.** $\dfrac{3\pi i}{2e}(3-e)$

66) $\oint\limits_{|z-7i|=2}\left[\dfrac{2\operatorname{sh}\dfrac{\pi i z}{2+14i}}{z(z-1-7i)^2}+\dfrac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+i}+\dfrac{(z-3)\operatorname{ch} z}{z^3}\right]dz$

отг. $\dfrac{2\pi}{625}(1226-7i)$

67) $\oint\limits_{L}\left[\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi i z}{4}}{z(z+2)^2}+z^2\cos\dfrac{i}{z+3}\right]dz$; $L\equiv x^2+6x+y^2+5=0$

отг. $-2\pi i\left(3+\dfrac{\pi}{8}\right)$

68) $\oint\limits_{|z+2|=3}\left[\dfrac{1+z-\operatorname{ch} z}{z^2(z+2)^2}+ze^{\frac{1}{z+2}}\right]dz$ **отг.** $\dfrac{\pi i}{2}(\operatorname{sh}2-\operatorname{ch}2-5)$

69) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{\sin^2 \dfrac{\pi z}{2}}{(z-5)^2(z-2)^2}dz$ **отг.** $-\dfrac{4}{27}\pi i$

70) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \left[\frac{1-\cos z}{z^2 \sin^2 z} + z^3 \cos z^2\right]dz$ **отг.** 0

71) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=3} \left[z^2 \cos z + 6\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi i z}{4+4i}}{z^2\left(z-2-2i\right)^2}\right]dz$

отг. $\dfrac{3\pi(\pi-4)(i-1)}{16}$

72) $\displaystyle\oint\limits_{L} \left[|z|\operatorname{Re} z^2 + z e^{\frac{z}{z-i}} + \frac{z}{(z-1-i)(z^2+1)^2}\right]dz$; L е границата

на областта $G \equiv \begin{cases} |z| \le 2 \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$ **отг.** $\dfrac{56}{3} - 3\pi e i + \dfrac{\pi}{50}\left(4-3i\right)$

73) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{1-\cos z}{z^2(z+1)^3}dz$ **отг.** $\pi i\left(6-4\sin 1-5\cos 1\right)$

74) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \left[\frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2(z-1)^2 \sin z} + z e^{\frac{z}{z-1}}\right]dz$

отг. $2\pi i\left[4 + \operatorname{Re} s(1) + \dfrac{3}{2}e\right]$,

$$\operatorname{Re} s(1) = \frac{1}{\sin^2 1}\left[2(\operatorname{sh} 2 + \sin 2)\sin 1 - (2\sin 1 + \cos 1)(\operatorname{ch} 2 - \cos 2)\right]$$

75) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1-i|=2} \left[\left(z^2+1\right)\sin z + \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2(z-i)^2 \operatorname{sh} z}\right]dz$

отг. $2\pi i\left[-\dfrac{25}{2}+\operatorname{Re}s(i)\right]$, $\operatorname{Re}s(i)=-5\dfrac{\sin 5+i(\operatorname{ch}5-\cos 5)}{\sin 1}-$

$$-(2\sin 1+\cos 1)\frac{\cos 5-1+i(\sin 5-\operatorname{sh}5)}{\sin^2 1}$$

IV. Използвайки теорема 1 или теорема 2 (§ 12), изчислете интегралите, дадени по-долу, в които с ∂D е означен контурът на посочената област D, обходим един път в положителна посока:

1) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{dz}{\left(z^2-1\right)^2\left(z-3\right)^2}$; $D\equiv 2<|z|<4$ **отг.** $-\dfrac{3\pi i}{64}$

2) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{3z}}dz$; $D\equiv|z|>4$ **отг.** $\dfrac{16\pi i}{3}$

3) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{dz}{z^3\left(z^{10}-2\right)}$; $D\equiv|z|<2$ **отг.** 0

4) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}dz$; $D\equiv|z|<3$ **отг.** 0

5) $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$; $D\equiv|z|<2$ **отг.** $-\dfrac{2\pi i}{3}$

6) $\displaystyle\int_{\partial D}\sin\frac{z}{z+1}dz$; $D\equiv|z|>3$ **отг.** $2\pi i\cos 1$

7) $\displaystyle\int_{\partial D}z\sin\frac{z+1}{z-1}dz$; $D\equiv|z|<2$ **отг.** $4\pi i(\cos 1-\sin 1)$

8) $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{1}{z-1}dz$, $D \equiv |z-1|>1$ **отг.** $-2\pi i$

9) $\int\limits_{\partial D} \frac{1}{z}e^{\frac{1}{1-z}}dz$, $D \equiv |z-2|+|z+2|<6$ **отг.** $2\pi i$

10) $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{\left(z^3-z\right)\left(z-i\right)}dz$; $D \equiv |z-1|<\frac{1}{2}$ **отг.** $\frac{\pi}{2}\left(i-1\right)\sin 1$

11) $\int\limits_{\partial D} \frac{\operatorname{cotg} z}{z}dz$; $D \equiv |z|>1$ **отг.** 0

12) $\int\limits_{\partial D} \frac{zdz}{e^{z^2}-1}$; $D \equiv |z|>4$ **отг.** $-10\pi i$

13) $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3dz}{e^{z^2}-1}$; $D \equiv |z|<4$ **отг.** 0

14) $\int\limits_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1}dz$; $D \equiv |z|>2$ **отг.** $\pi i\left(2\sin 1+\cos 1\right)$

15) $\int\limits_{\partial D} \frac{z^{21}dz}{\left(2z^2+1\right)^3\left(3z^4+1\right)^4}$ $D \equiv |z|<1$ **отг.** $\frac{\pi i}{324}$

16) $\int\limits_{\partial D} \frac{zdz}{\left(z^6+i\right)\left(z-1\right)}$; $D \equiv \left|z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right|<\frac{9}{10}$ **отг.** $\frac{\pi}{6}\left(5-\sqrt{2}+7i\right)$

17) $\int\limits_{\partial D} \frac{z^{20}dz}{\left(2z^3+1\right)^2\left(z^4-1\right)^3}$; $D \equiv |z|<2$ **отг.** $-\frac{\pi i}{2}$

18) $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{z^3\left(z^6+1\right)^2\left(z-1\right)}$; $D \equiv |z|<2$ **отг.** 0

V. Пресметнете несобствените интеграли:

1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{6}$

2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$ **отг.** $\frac{\pi}{3}$

3) $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$ **отг.** $\frac{\pi}{6}$

4) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ **отг.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

5) $\int_0^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$ **отг.** $\frac{2\pi}{3}$

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ **отг.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

7) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ **отг.** $\frac{\pi}{4}$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$ **отг.** $-\frac{\pi}{27}$

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$ **отг.** $\frac{5\pi}{12}$

10) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4+6x^2+25}$ **отг.** $\frac{\pi}{4}$

11) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+4ix-5\right)^2}$ **отг.** 0

12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$ **отг.** $\dfrac{\pi}{6}$

13) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$ **отг.** $\dfrac{\pi}{4}$

14) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}$ **отг.** $\dfrac{\pi}{60}$

15) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+a^2\right)^3},\ a>0$ **отг.** $\dfrac{\pi}{16a^3}$

16) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}$ **отг.** $\dfrac{5\pi}{16}$

(***Упътване****:* Решете задачата непосредствено и като използвате пример 18, § 12.)

17) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right)}$ **отг.** $-\dfrac{\pi}{5}$

18) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$ **отг.** $\dfrac{\pi}{2}$

19) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 dx}{\left(x^4+a^4\right)^2},\ a>0$ **отг.** $\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{8a}$

20) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)^2}$ **отг.** $\frac{2\pi}{675}$

21) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4dx}{\left(x^2+1\right)^4}$ **отг.** $\frac{\pi}{32}$

22) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^4+1\right)^2}$ **отг.** $\frac{3\pi\sqrt{2}}{8}$

23) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2-10x+29\right)^2}$ **отг.** $\frac{\pi}{16}$

24) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$ **отг.** $\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}$

25) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+10}{\left(x^2+4\right)^2}dx$ **отг.** $\frac{7\pi}{8}$

26) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$ **отг.** $\frac{\pi}{6}\left(2\sqrt{3}-3\right)$

27) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{\left(x^2+8x+17\right)^2}dx$ **отг.** 8π

28) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{\left(x^2-10x+29\right)^2}dx$ **отг.** 2π

VI. Пресметнете следните интеграли:

1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x},\ a>1$ **отг.** $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

2) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$ **отг.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

3) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\left(1+3\cos^2 x\right)^2}$ **отг.** $\frac{5\pi}{8}$

4) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2},\ 0<a<1$ **отг.** $\frac{2\pi}{1-a^2}$

5) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\sin x}$ **отг.** $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$

6) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x}{5-4\cos x}dx$ **отг.** $\frac{17\pi}{48}$

7) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5+3\cos 2x}dx$ **отг.** $\frac{13\pi}{54}$

8) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x+\cos x}{2\sin x+3}dx$ **отг.** $\pi\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}$

9) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$ **отг.** $\pi\sqrt{2}$

10) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1-2p\cos 2x+p^2}dx\ \left(0<p<1\right)$ **отг.** $\frac{\pi\left(p^2-p+1\right)}{1-p}$

11) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{1-2p\cos x+p^2}dx\ \left(p>1\right)$ **отг.** $\frac{2\pi}{p^2\left(p^2-1\right)}$

12) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1-2p\sin x+p^2}dx \;\left(0<p<1\right)$ **отг.** 0

13) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{cotg}\left(x-a\right)dx \;\left(\operatorname{Im} a>0\right)$ **отг.** πi

(***Упътване***: Положете $e^{2i\left(x-a\right)}=z$.)

14) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg}\left(x+ai\right)dx,\; a\in\mathbb{R},\, a\neq 0$ **отг.** $\pi i.sgn\, a$

15) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}$ **отг.** $\frac{\pi}{2}$

16) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{13+12\sin x}$ **отг.** $\frac{2\pi}{5}$

17) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2}\left(4\sqrt{2}-5\right)$

18) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$ **отг. а)** $\frac{\pi}{a^2}, |a|>1$; **б)** $\pi, |a|\leq 1$

19) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(1+2\cos x\right)^n \cos nx}{5+4\cos x}dx \;\left(n=0,1,2,...\right)$ **отг.** $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

(***Упътване***: Прибавете към дадения интеграл интеграл, в който $\cos nx$ е заменен с $i\sin nx$.)

20) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos^2 x-\cos^2 a}{\sin x-\sin a}\right)^n e^{inx}dx \;\left(n=1,2,...\right)$ **отг.** $2\pi\left(-\frac{i}{2}\right)^n$

(***Упътване***: Преработете първо дробния израз в скобите.)

21) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ **отг.** $\pi\sqrt{2}$

22) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^{2n} x\,dx,\ n \in \mathbb{N}$ **отг.** $\frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

23) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 3x}{(5-4\cos x)^2}dx$ **отг.** $\frac{343}{1728}\pi$

24) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{2}\sin x+3}$ **отг.** 2π

25) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{4-\sqrt{7}\sin x}$ **отг.** $\frac{2\pi}{3}$

26) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\left(4+\sqrt{7}\cos x\right)^2}$ **отг.** $\frac{8\pi}{27}$

27) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x\right)^2}$ **отг.** $2\pi\sqrt{3}$

28) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos x\right)^2}$ **отг.** $\frac{2\pi\sqrt{15}}{9}$

29) $\int\limits_{0}^{2\pi} e^{\cos x}\cos(nx-\sin x)dx$ ($n-$цяло число)

отг. 0 при $n<0$; $\frac{2\pi}{n!}$ при $n \geq 0$

(***Упътване***: Положете $x = \pi + t$, преработете интеграла и използвайте идеята от пример 19.)

VII. Пресметнете интегралите:

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{x^2+1} dx$ **отг.** $-\frac{\pi}{2e^2}$

2) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$ **отг.** 0

3) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+x^2+1} dx$ **отг.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin \frac{1}{2}$

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5} dx$ **отг.** $-\pi e^{-1} \sin 2$

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20} dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2} e^{-4} \left(2\cos 2+\sin 2\right)$

6) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^4+x^2+1\right)} dx$ **отг.** $\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]$

7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\left(x^2+4\right)\left(x-1\right)} dx$ **отг.** $\frac{\pi}{5}\left(\cos 1-e^{-2}\right)$

8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x+1\right) \sin 2x}{x^2+2x+2} dx$ **отг.** $\pi e^{-2} \cos 2$

9) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx$ **отг.** $\frac{\pi}{3} e^{-2} \left(4-e\right)$

10) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-5x+6} dx$ **отг.** $\pi\left(2\sin 2-3\sin 3\right)$

11) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}dx$ **отг.** $\pi e^{-3}\left(\cos 1+\frac{1}{3}\sin 1\right)$

12) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+x^2+1}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\left(\cos 1+\sqrt{3}\sin 1\right)$

13) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx \ (a>0)$ **отг.** $\frac{\pi}{4a}e^{-a}$

14) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx \ (\lambda>0)$ **отг.** $\frac{\pi}{24}\left(3e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}\right)$

15) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x^3+5x\right)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2}\left(e^{-1}+e^{-3}\right)$

16) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-1}\right)$

17) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5}dx$ **отг.** $\pi e^{-2}\left(\cos 4-\sin 4\right)$

18) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}dx$ **отг.** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

19) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2+a^2\right)^3}dx \ (\operatorname{Re} a>0)$ **отг.** $\frac{\pi e^{-a}}{16a^5}\left(a^2+3a+3\right)$

20) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+1}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

21) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}dx$ **отг.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

22) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx$ **отг.** $\frac{4\pi}{9}e^{-\sqrt{3}}\left(3+\sqrt{3}\right)\sin 1$

23) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x-\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2}\left(4e^{-3}-3e^{-2}\right)$

24) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x^3+1\right)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{6}\left(2e^{-1}-e^{-2}\right)$

25) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2}e^{-4}$

VIII Пресметнете следните интеграли като използвате дадените указания:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$ (интеграл на Поасон) **отг.** $e^{-a^2}\sqrt{\pi}$

(***Упътване***: Разгледайте $\oint\limits_L e^{-z^2}dz$, където L е контурът на правоъгълника $ABCD$: $A(R,0)$; $B(R,a)$; $C(-R,a)$; $D(-R,0)$. Пресметнете границата на всеки интеграл по отделните страни на правоъгълника при $R\to\infty$ и използвайте, че $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.)

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx,\ 0<\lambda<1$ (интеграл на Ойлер) **отг.** $\frac{\pi}{\sin \lambda\pi}$

(***Упътване***: Разгледайте $\oint\limits_L \frac{e^{\lambda z}}{1+e^z} dz$, където L е правоъгълният контур, даден в зад.1, но при $a = 2\pi$.)

3) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$ **отг.** 0

(***Упътване***: Разгледайте $\oint\limits_L \frac{e^{iz}}{z} dz$, където L е контурът $ABCD: AB$ - отсечка: $A(r,0), B(R,0)$; BC - дъга от окръжността $|z|=R$ в първи квадрант; CD - отсечка: $C(0,R), D(0,r)$ и DA - дъга от окръжността $|z|=r$ в първи квадрант, $0<r<R$, т.е. L е контурът на областта $D \equiv \{|z|>r\ \ (0<r<R); |z|<R, \operatorname{Im} z>0, \operatorname{Re} z>0\}$.)

4) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ **отг.** $\frac{\pi}{2}$

(***Упътване***: Разгледайте $\oint\limits_L \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz$, където L е границата на областта $D \equiv \{|z|>r, |z|<R, \operatorname{Im} z>0\ (0<r<R)\}$. Или интегрирайте по части, след което използвайте интеграла на Дирихле.)

5) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+k^2} dx\ \ (a>0, k>0)$ **отг.** πe^{-ak}

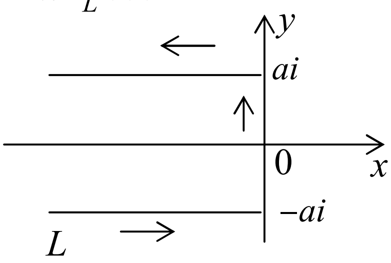
(***Упътване***: Разгледайте $\oint\limits_L \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}dz$, където L е контурът на областта $D \equiv \{|z|< R; \operatorname{Im} z > 0\}$.)

6) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}dx \quad (0<a<1; 0<b<1)$

отг. $\pi(\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi)$

(***Упътване***: Разгледайте $\oint\limits_L \frac{e^{\lambda z}}{1-e^z}dz \ (0<\lambda<1)$, където контурът L е както в зад. 1 с $a=\pi$, но точката $z=0$ е изрязана с полуокръжността $|z|=r>0, \operatorname{Im} z > 0$.)

7) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^z}{\cos z}dz$, където L е контурът, показан на черт. 2.66



Черт. 2.66

отг. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}+1}$

8) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$

отг. $\frac{\pi}{2a}\ln a$

(***Упътване***: Използвайте $\oint\limits_L \frac{\ln z}{z^2+a^2}dz$, където L е границата на областта D от зад. 4.)

9) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$ **отг.** $\frac{\pi}{8a}\left(\pi^2 + 4\ln^2 a\right)$

(***Упътване*:** Използвайте идеята на зад. 8, както и резултата на тази задача.)

10) а) $\int\limits_0^{\infty} x^{p-1}\cos ax\, dx$;

б) $\int\limits_0^{\infty} x^{p-1}\sin ax\, dx \quad (a>0,\, 0<p<1)$

(***Упътване*:** Разгледайте $\oint\limits_L z^{p-1}e^{-az}dz$, където L е контурът, даден в зад.3.)

отг. а) $\dfrac{\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}}{a^p}$;

б) $\dfrac{\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}}{a^p}$

(Интегралът $\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ се нарича *гама-функция*).

Биографични справки

Абел, Нилс Хенрик (N. H. Abel) (05.08.1802-06.04.1829) – норвежки математик. Роден е близо до Ставангер в малкото норвежко селище Finnoy, разположено на северозападното крайбрежие на Норвегия, в бедно пасторско семейство.

Нилс Абел

За първите години от живота на Абел са се запазили малко сведения. Известно е само, че като ученик в началото малко се е отличавал от своите другари. Неговата математическата дарба се пробужда благодарение на извънкласните занятия по математика, които водел неговият учител по два часа седмично. Тези занятия са се състояли в решаването на задачи с повишена трудност, главно по алгебра и геометрия. Абел решавал задачите мълниеносно, така че учителят е трябвало да подбира специални задачи само за него. Самият учител характеризира така своя ученик: "Момчето проявява голяма страст към математиката и за кратко време е постигнало в нея такива успехи, на каквито може да бъде способен само гений."

През 1820 г. умира баща му и семейството остава без всякакви средства за съществуване. Положението става безизходно. Но от математическата дарба на момчето се заинтересували професори и за своя сметка го записват да се учи в университет. Абел взема, както се е и очаквало, конкурсните изпити по математика отлично и постъпва в университета в Осло.

Макар че Абел е учил в университет, в математическите знания той е самоук. По това време в университета, в който е учил Абел, не са се четели никакви курсове по математика. Той изучава математика по книгите, които купува с оскъдните средства, отпускани му от професорите.

Отдавайки се на своите любими занимания по математика, той мисли, че е намерил решение на уравнение от пета степен в радикали. Тази вест обикаля целия университет и става почти сензация. Обаче, размишлявайки още и още, Абел намира грешка в своето предишно изследване и идва до извода, че такова решение е невъзможно.

През 1824 г. той публикува доказателството на знаменитата си теорема за неразрешимостта в радикали на общи алгебрични уравнения от пета и по-висока степен.

Продължавайки работата си върху теорията на алгебричните уравнения, Абел по-късно отделя клас уравнения от степен по-висока от четвърта, които са разрешими в радикали. Уравненията от този клас е прието да се наричат “абелови уравнения”.

Своето доказателство за невъзможността за решаване на общо алгебрично уравнение от степен по-висока от четвърта в радикали той изпраща за отзив на знаменития немски математик Гаус, но последният не счел за нужно да отговори на начинаещия учен.

От 1825 до 1827 г. Абел е в чужбина, в частност в Берлин и Париж. В Берлин той се запознава с немския математик А. Л. Крел и става сътрудник в неговото списание. Много класически трудове на Абел са публикувани през 1826 г., но по това време те не донасят известност на автора.

Абел възлага големи надежди на задграничното си пътуване в Париж, което се осъществява за сметка на предоставената му специална стипендия. Париж бил център на научната мисъл на Франция. Там се е намирала Парижката АН, там са работили най-големите математици в света. Обаче и в Париж го е очаквало разочарование. Водещите френски математици така и не си направили труда да разберат работите на младия норвежки учен и останали съвършено равнодушни към него. Научният доклад на Абел по теория на абелевите функции, представен в Парижката академия в писмен вид, останал неразгледан и бил даден в архив като материал, непредставляващ никакъв интерес. Този трактат, пролежавайки дълги години в архива, е отпечатан чак след смъртта на Абел.

Завърнал се в родината си, Абел дава частни уроци. През 1828 г. получава длъжността доцент в университета и в инженерното училище в Осло. Голямата нужда, в която живеел, системното недояждане и прекалено големият труд свършили своята работа. Абел изпаднал в дълбока меланхолия, която била явен признак за душевно разстройство. Меланхолията го напускала само в часовете на вдъхновен научен труд - той ставал съвършено неузнаваем, напълно се преобразявал и сякаш светел с вътрешен огън. Това били часове на истинско щастие. Той забравял света с неговите превратности и несгоди и живеел само в сферата на науката.

През декември 1828 г. Абел се простудява, заболява тежко и на 6 април 1829 г. умира - едва 26 годишен!

Ученият, извършил цял преврат в науката, не бил увенчан с лавров венец, докато бил жив. Трудовете на Абел получават признание едва след неговата смърт.

През 1830 г. Парижката АН присъжда (посмъртно) на него и на немския математик К. Г. Я. Якоби премия за развитието на теорията на елиптичните функции. Събраните съчинения на Абел излизат на френски език през 1839 г.

През своя кратък живот Нилс Абел прави най-важното за по-нататъшното развитие на математиката откритие. Изследвайки въпроса за решението в радикали на общо уравнение от пета степен, той поставя такава обща идея: вместо да се търси зависимост, съществуването на която остава неизвестна, трябва да се постави въпросът възможна ли е в действителност такава зависимост. Ръководейки се от тази идея, той изяснява причините, вследствие на които уравненията от втора, трета и четвърта степени се решават в радикали. Абел открива редица алгебрични функции, които не се интегрират с помощта на елементарни функции; тяхното интегриране води до нови трансцендентни функции. Тези изследвания довеждат до създаването от Абел на теорията на елиптичните и хиперелиптичните функции, за която допринася особено много, независимо от К. Г. Я. Якоби. Абел е основател на общата теория на интегралите от алгебрични функции. Други важни работи на Абел се отнасят към теорията на редовете. Неговото име носи теоремата за непрекъснатостта на функцията в целия кръг на сходимост на съответния ред. Има абелеви диференциали, интеграли, уравнения, функции, критерии за сходимост и др.

По предложение на учените със средствата на международна подписка на най-широкия площад в Осло, столицата на Норвегия, е издигнат величествен паметник - гордата фигура на младеж с одухотворено лице, стремително крачещ нагоре, който прескача две чудовища, застанали на пътя му.

Адамар, Жак (J. S. Hadamard) (08.12.1865-17.10.1963) – френски математик, член на Парижката АН (1912), чуждестранен член на АН на СССР (1929). Роден е във Версай. В детството си се е увличал от езиците. Известна е неговата победа на конкурса на знаещите гръцки и латински езици. Средното си образование получава в имперския лицей Луи Велики. Известно време учи в Политехническото училище. През 1890 г. завършва Висшето нормално училище и започва преподавателска дейност. През 1892 г. става доктор на науките. Известно време работи в Бордо, после в

Жак Адамар

Париж - Сорбоната (1900-1912), Колеж де Франс (1897-1935), Политехническото училище (1912-1935) и Централното училище на изкуствата и занаятите (1920-1935).

Адамар е многократен лауреат на Парижката АН. За 90-та си годишнина той е награден с Големия кръст на Почетния легион. Известни са фундаменталните изследвания на Адамар в различни области на математиката. В теорията на числата той доказва (изказания от П. Л. Чебишев) асимптотичен закон за разпределение на простите числа. В теорията на диференциалните уравнения се занимава с така наречената задача на О. Коши за хиперболичните уравнения. В класическия анализ и в теорията на функциите са известни неравенството на Адамар, теоремата за степенните редове. Адамар формулира също понятието "коректност на задача от математическата физика". Интересни са изследванията на Адамар по вариационно смятане (вариационна формула, теорема на Адамар). Списъкът на неговите трудове съдържа 325 заглавия. Адамар се занимава също с въпросите на преподаването в училище и написва учебник по геометрия.

Адамар е бил страстен любител на пътешествията. Посещава Китай, Бразилия, САЩ, където чете курсове по математика и изнася доклади. Нееднократно е бил в СССР. Адамар е прогресивен обществен деятел. В периода на окупацията на Франция живее в САЩ, но и тримата му сина загиват в боевете за Франция.

Арган, Жан Роберт (J. R. Argand) (18.07.1768-13.08.1822) – швейцарски математик. Роден е в Женева. Живял е в Париж. Независимо от К. Весел дава геометрична интерпретация на комплексните числа в равнината в съчинението си "Опит за някакво представяне на имагинерните величини и т.н." (1806), останало по онова време незабелязано. Там е дадено доказателство на основната теорема на алгебрата, различно от това на Гаус. Понятието "модул на комплексното число" е въведено от Арган през 1814-1815 г.

Архимед (ок. 287-212 г. пр.н.е.) - древногръцки математик, физик и механик. За неговия живот са известни само откъслечни сведения, които са дошли до нас благодарение на древните писатели Цицерон, Плутарх и

Архимед

др. От техните работи узнаваме, че Архимед е роден през 287 г. пр.н.е. в Сиракуза и на 75 години е бил убит от римски воин при превземането на града. Предполага се, че негов баща е астрономът Фидий.

В своите математически работи Архимед, изпреварвайки идеите на съвременния анализ, остроумно решава задачи за изчисляване на дължини на криви, на лица и обеми. В частност, използувайки свой оригинален метод, той намира лицето на сегмент от парабола.

На Архимед принадлежат редица забележителни изобретения: машини за оросяване на полята, водоподемен механизъм (архимедов винт), система от ръчки и блокове за вдигане на големи тежести, военни метателни машини и т.н.

Ученият бил верен поданик на своята родина и на града Сиракуза. По време на втората Пуническа война той оглавява отбраната на родния си град. В течение на две години с помощта на своите метателни машини той с успех защитава града от мощната римска армия, която се командва от Марк Клавдий Марцел - един от най-големите военоначалници по онова време. Ето какво пише Плутарх (ок. 46 - 120 г.) за тогавашните събития: "Марцел се е надявал напълно на изобилието и блясъка на своето въоръжение и на собствената си слава. Но всичко това се оказало безпомощно срещу Архимед и неговите машини...".

Архимед е родственик на умрелия цар Хиерон. На времето Архимед пише на Хиерон, че с неголяма сила е възможно да се приведе в движение произволно голяма тежест; нещо повече, напълно опирайки се на доказателствата си, той твърди, че е в състояние да приведе в движение самата Земя, ако съществува друга, на която той може да застане. ("Дайте ми опорна точка и аз ще преместя Земята".) Архимед показва на Хиерон това на дело, премествайки товарен тримачтов кораб.

По-нататък Плутарх разказва следното: "Когато корабите на Марцел се приближили на разстояние "полет на стрела", старецът (Архимед) заповядал да приближат шестстенно огледало, направено от него. На известно разстояние от това огледало той сложил други по-малки огледала от подобен вид. Тези огледала се въртели на своите шарнири с помощта на квадратни пластинки. След това той помествал своето огледало сред слънчевите лъчи през лятото и зимата. Лъчите, отразени от тези огледала, произвели страшен пожар на корабите, които били обърнати в пепел на разстояние, равно на "полет на стрела".

Този разказ, по думите на проф. М. Е. Ващенко-Захарченко, дълго време е смятан за басня, докато известният учен Бюфон през 1777 г. не показва на практика, че това е възможно. С помощта на 168 огледала той през април запалва дърво и разтопява олово на разстояние 45 метра.

Характеристика на крупния инженер Архимед дава гръцкият писател от II век Атиней, автор на енциклопедическия труд "Пирът на софистите" в 15 книги, дошъл до нас в съкратен вид. Атиней рисува Архимед като изобретателен корабостроител.

До нас са дошли следните съчинения на Архимед: "За квадратурата на параболата", "Послание към Ератостен за някои теореми на механиката", "За броя на песъчинките", "За спиралите", "За измерването на кръга", "Книга на лемите", "Построяване на правилен седмоъгълник", "За коноидите и сфероидите", "За кълбото и цилиндъра", "За равновесието на равнината", "За плаващите тела", "Откъси". Централна тема на математическите работи на Архимед е задачата за намиране лицата на повърхнини и обемите на тела чрез разработени от него методи, които след две хилядолетия се развиват в интегралното смятане.

В едно от ранните математически съчинения "За квадратурата на параболата" Архимед извежда по два начина формулата за лицето на параболичния сегмент - механически и геометрически. Тук той също намира сумата на геометрична прогресия. В по-късното си съчинение "За кълбото и цилиндъра" той изчислява лицето и обема на кълбо, на сферичния сегмент и на цилиндъра, използувайки за това повърхнини и обеми на тела, образувани от въртенето (около диаметъра) на многоъгълници, вписани в кръг и описани около него, а кълбото разглежда като граница на обемите на тези ротационни тела. В същото това съчинение е дадено геометрично решение на кубично уравнение и е формулирана аксиомата на Архимед. На тази аксиома е основан процесът на последователното деление в аритметиката и геометрията. През 1906 г. е намерено "Послание към Ератостен за някои теореми на механиката" или, както още наричат това съчинение, "Метод", където до известна степен са изяснени методите, с помощта на които Архимед е доказвал основните теореми. В работата "За спиралите" той разглежда спирала с уравнение $\rho = a\varphi$ (архимедова спирала) и извършва сумиране на квадратите на последователните естествени числа. В съчинението "За коноидите и сфероидите" Архимед разглежда обемите на тела, получени от въртенето на парабола, хипербола, елипса и техните сегменти. В съчинението "За измерването на кръга" по пътя на съпоставяне на периметрите на вписания и описан 96-ъгълник се доказва, че $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$; тук за първи път в науката е дадена оценка на грешката и е определена степента на точност на получения резултат. Въведената от Архимед за π приблизителна стойност $\frac{22}{7} \approx 3{,}14$ се оказала напълно удовлетворителна за практиката по онова време. Тя се използва и сега. В съчинението "За броя на песъчинките" Архимед дава система за наименуване на целите числа, позволяваща да се изразява произволно голямо число, и разрушава разпространеното мнение за съществуването на "най-големи числа".

За по-късното творчество на Архимед е характерен неговият интерес към точните изчисления и астрономията. Най-голямо постижение в астрономията е построяването на планетарий. От последните работи на Архимед особено важно е съчинението "За плаващите тела", съдържащо закон, който носи сега неговото име. Съчиненията на Архимед са издадени на много езици, а неговите живот и смърт са обгърнати с легендарна слава.

Бернули (Bernoulli) - семейство швейцарски учени. Родоначалник на семейството е Якоб Бернули (починал през 1583) - преселник от Холандия. Неговият внук Якоб Бернули (1598-1634) се заселва в Базел. Много членове на семейството са видни деятели, заемали висши държавни длъжности.

Бернули, Якоб I (27.12.1654-16.08.1705) – швейцарски математик. Роден е в Базел. По желание на баща си изучава теология, но заедно с това се занимава и с математика. По време на пътуване в Холандия и Англия се запознава с местните математици. Връщайки се в родния град, чете лекции по експериментална физика. От 1687 г. е професор по математика в университета в Базел. Най-важните заслуги на Якоб Бернули са в развитието на анализа на безкрайно малките, в теорията на редовете, вариационното смятане и в теория на вероятностите.

През 1687 г., запознавайки се с първия мемоар на Г. В. Лайбниц по диференциално смятане (1684), Бернули прилага новите идеи за изучаване на свойствата на редица криви: логаритмичната спирала, откритата от него лемниската, верижката и др. Той пресмята лицето на сферичен триъгълник, пресмята лицата на коноидални и сфероидални повърхнини, извършва многочислени квадратури и ректификации.

Неговата книга “Аритметични приложения за безкрайни редове и техните крайни суми” (1689-1704) е първото ръководство по теория на редовете.

Якоб I Бернули

Съвместно с брат си Йохан I Бернули полага началото на вариационното смятане.

В труда си “Изкуството на предлагане”, издадено от Николай I Бернули през 1713 г., Якоб I Бернули решава някои задачи на комбинаториката; открива числа, наречени по-късно числа на Бернули; доказва така наречената теорема на Бернули – частен случай на закона за големите числа, имащ основно значение в теория на вероятностите и нейните приложения в статистиката; построява математически модел за описване на серия независими опити (схема на Бернули). Благодарение на работите на Якоб I Бернули теорията на вероятностите придобива особено голямо значение в практическата дейност. Много термини в теорията на вероятностите носят неговото име.

На Якоб I Бернули принадлежат също работи по физика, аритметика, алгебра и геометрия. Сред неговите ученици трябва да споменем, освен брат му Йохан I Бернули, също и племенника Николай I Бернули и П. Ойлер - бащата на великия математик Л. Ойлер.

Бернули, Йохан I (J. Bernoulli) (27.07.1667-01.01.1748) - швейцарски математик, брат на Якоб I Бернули. Роден е в Базел. От 1695 г. е професор по математика в Грьонингенския университет (Холандия), от 1705 г. - в Базелския университет. Почетен член е на Петербургската АН. Отначало се готвел да става търговец, после под ръководството на брат си Якоб I Бернули се заема с изучаването на математика, а също така и на медицина. По-късно пътешества, учи се и преподава в Париж. Един от неговите ученици е маркиз Г. Ф. де Лопитал. Йохан I Бернули постига големи резултати в разработването на диференциалното и интегрално смятане, където сътрудничи с Г. В.

Йохан I Бернули

Лайбниц; в теорията на диференциалните уравнения; вариационното смятане; геометрията и механиката. Той развива теорията на показателната функция; извежда правилото за разкриване на неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ (носещо името на Лопитал); дава методи за интегриране на рационални дроби; за изчисляване на лицата на равнинни фигури и за ректифицируемост на различни криви; открива ред, наречен с неговото име и родствен с реда на Тейлор; дава дефиниция на понятието функция като аналитичен израз, съставен от променливи и постоянни величини, и др. На Йохан I Бернули принадлежи първото систематично изложение на диференциалното и интегрално смятане. Курсът по интегрално смятане на Йохан I Бернули е издаден през 1742 г.

Както вече споменахме, той, заедно с брат си Якоб I Бернули, полага началото на вариационното смятане.

В геометрията Йохан I Бернули дава дефиниция на пространствените координати (1715), занимава се с различни специални криви, на него принадлежат ценни работи по механика и др. Голямо значение за развитието на математиката има кореспонденцията на братята Бернули с Лайбниц. Измежду многочислените ученици на Йохан I Бернули трябва, освен тримата му сина, да споменем Л. Ойлер.

Якоб I Бернули е първороден син в семейство Бернули, а Йохан - трети син и десето дете в семейството. По съвета на своя брат Якоб още през 1685 г. Йохан започва да се занимава с математика и веднага у него се забелязва необикновен талант. Лекотата, с която той изучава новия, далеч не лесен материал, била поразителна. За две години изучава трудовете на древните математици, включително “Геометрията” на Декарт. Йохан се изравнява с брат си Якоб и двамата заедно изучават статията на Лайбниц, в която той дава обзор на ново смятане - диференциалното, в най-стегнат вид. В началото братята не могли веднага да осмислят статията и Якоб пише писмо на Лайбниц в Хановер, като го моли да им даде някои разяснения. Но тогава Лайбниц пътешествал и не могъл да им отговори. Междувременно братята не само разбират всичко, което се съдържа в статията на Лайбниц, но и придвижват изчисленията по-нататък. Когато през 1695 г. Лайбниц се връща, той отговаря на братята, че те до такава степен са овладели новото смятане, че той им е нужен не като наставник, а като единомишленик. Между Йохан и Лайбниц започва кореспонденция (1693), която продължава до смъртта на Лайбниц. През 1745 г. тази кореспонденция е издадена в два тома.

Годините 1691-1696 се отличават с голям брой важни резултати, получени от братята Бернули. Но през това време отношенията между тях започват да се развалят. Причината е в някои черти от характера на по-малкия брат. Неговото голямо самомнение и завист му нашепвали нелепата мисъл: по-големият брат до такава степен му отстъпва, че не трябва да го смята за значителен математик. При силно желание Йохан наистина можел да се убеди в това - нали неговите решения блестят с простота и елегантност, а Якоб получавал своите резултати по по-тромав и обемист начин. Йохан, като първокласен математик, не можел да не забележи, че зад тази тромавост се крие дълбочина на мисълта, но завистта и, ще прибавим още, тщеславието го подтиквали да взема само видимата външност на работите на Якоб, която външност наистина губела в очите на повърхностния читател. Якоб е дълбоко засегнат от поведението на брат си, още повече, че той вече е сериозно болен. Към това се прибавят и огорченията, доставяни му от неочакваните нападки на брат му.

Няколко дена след защита на докторската си дисертация по медицина (1694), която се казва "Конкурсна физико-анатомична дисертация за движението на мускулите" и може да се смята за математическа, Йохан се оженва. В малкия Базел, където единствената катедра била заета от по-големия брат, Йохан не може да намери място, което да съответства на неговите изключителни способности. Лайбниц му предлага катедра в един от университетите в Германия, но семейството на жена му настоява той да се откаже. Идва и предложение от университета в Грьонинген. Йохан трябвало да обяви, че ще замине сам без семейството си (първородното му дете било на 7 месеца), ако тъстът му продължава да упорства. Родителите на жена му се примиряват и Йохан заминава за Грьонинген заедно със семейството си през 1695 г. Там той прекарва 10 години. Чете математическа и експериментална физика и е първата личност в града. Присъствието на математик от такава величина издига университета на малкия провинциален град на едно от първите места в Европа.

Непрекъснатият поток от все нови и нови резултати на двамата братя, независимо от взаимната им язвителност, с която те, като правило, се съпровождали, създават на братята репутацията на най-силните след Лайбниц математици в Европа (Хюйгенс умира през 1695 г.). Затова, когато Парижката АН през 1699 г. за първи път избира чуждестранни членове, то заедно с Нютон, Лайбниц и др. са избрани и братята Бернули. Креслото на чуждестранен член на Парижката АН Бернули заемат в течение на 91 години. След смъртта на Йохан (1748) неговото кресло заема синът му Данаил I, починал през 1782 г., а след Данаил - Йохан II.

През 1701 г. е открита Берлинската АН (на първо време тя се нарича “Общество на науките”), в която президент е Лайбниц. Разбира се, че братята Бернули веднага влизат в състава на членовете на Академията.

Здравето на Якоб се влошава все повече. Измъчва го “изтощителна треска, изсмукваща силите капка по капка”, както изразително описва състоянието на туберкулозно болния един от биографите му. На 16 август 1705 г. Якоб I Бернули почива. Точно по това време Йохан, под силния натиск на тъста си, е принуден да прекрати своята дейност в Грьонинген и да се завърне в Базел. Базелският университет устройва на Йохан тържествен прием. Целият университетски сенат в пълен състав посреща новопристигналия и го кани да заеме катедрата, освободена след смъртта на брат му. Официалното встъпване в длъжност става на 17 ноември 1705 г.

Ще кажем още няколко думи за Якоб Бернули. Още в първите години на своите занимания с висша математика Якоб изучава логаритмичната спирала и открива много интересни нейни свойства. Той така високо ценял тази своя работа, че завещава да изобразят логаритмична спирала на надгробния му паметник, което е изпълнено. Надпис на латински гласи: ”Изменена възкръсвам същата”. В това изречение Якоб подчертава това свойство на логаритмичната спирала (открито от него и затова особено му скъпо), че нейната еволюта е също логаритмична спирала.

Между другото, положението на Йохан става както никога особено благоприятно. Семейните трудности свършват – той отново е в Базел и роднините са напълно удовлетворени. Най-мъчителният въпрос в неговия живот кой е по-талантлив – той или Якоб, със смъртта на брат му, се разрешава от само себе си. На негово разположение е катедрата на най-стария и знаменит университет. От всички страни той слуша похвали за себе си и своя талант. Обстоятелствата се подреждат така, че той можел изцяло да се отдаде на любимата си работа. Неговите интереси наистина малко се променят. Формалният апарат на анализа вече не привлича вниманието му до такава степен, както на млади години. Главен предмет на неговите занимания е приложението на анализа към различните въпроси на механиката, физиката и т.н. В тези години се разгаря спор с английските математици за приоритет. Йохан, разбира се, не можел да стои настрана от такъв важен за него въпрос. Не само той, а и самият Лайбниц признава, че братята Бернули са негови съавтори и разделят славата на създателя на новото смятане. На 21 септември 1694 г. Лайбниц пише на братята: “Тази методика е не по-малко ваша, отколкото моя”. И англичаните се осмеляват да подлагат на съмнение авторството! Йохан отправя своето недоброжелателно внимание на главната крепост на англичаните – на основното съчинение на самия Нютон, на неговите “Началá”. В своята автобиография той пише: “След смъртта на Лайбниц на мен ми се наложи да издържам натиска на цялата английска армия: Кейл, Робинс, Пембертон, Тейлор и други”. Справедливостта изисква да се добави, че Йохан със своя огромен математически талант и полемическо изкуство заставя цялата тази “армия” да замълчи. С Брук Тейлор Йохан води отделен спор. Негов предмет става приоритетът в решаването на знаменитата задача за центъра на колебанията на физическо махало. Последната статия на Якоб Бернули, отнасяща се до тази задача, е публикувана през 1703 г. Такъв проницателен и ревнив читател като Йохан, разбира се, не може да не оцени цялата дълбочина и остроумност на решението, дадено от брат му. Може ли той да остави задачата без свое решение, което трябва да покаже, че неговият автор е по-силен математик, отколкото автора на предишното, с други думи, че Йохан е по-силен математик, отколкото Якоб? Обаче, по тези или други причини, Йохан излиза със свое решение едва през 1714 г. Сега вече не представлява интерес въпросът чие решение е по-просто, по-елегантно и т.н. Едва ли и сам Йохан би могъл да си отговори съвършено искрено. Какво обаче било изумлението и гнева на Йохан, когато в същата 1714 г. излиза на бял свят книгата на Б. Тейлор, в която се дава решение на задачата за центъра на колебанията на физическо махало, напълно съвпадащо с неговото, на Йохан, решение! Йохан се хвърля в ново сражение, вече не по повод на чуждия приоритет, а по повод на своя. Той обвинява Тейлор не в друго, а в плагиатство. Тейлор се позовава на лесно проверим факт: книгата е обсъждана в Лондонското кралско дружество в ръкопис през 1713 г., когато за статията на Йохан Бернули още не е ставало и дума. Но Йохан не е от тези противници, които отстъпват пред фактите. Такъв тип спорове са характерни за Йохан, човек завистлив и мнителен. От друга страна, въпросът за приоритета през 17-18 в. бил далеч не така прост, както в по-късно време.

Йохан Бернули води много деен живот, но той не пречи на научната му работа, която е смисълът на неговия живот. Той се занимава с механика на течността и издава “Хидравлика”. За съжаление, при това се проявява една от лошите страни на неговия незавиден характер. През 1738 г. излиза забележителната “Хидродинамика” на сина му Данаил. И ето, оказва се, както пише академик Н. Фус, че “неизмеримата ревност на Йохан Бернули се прояви в потресаващ, може да се каже, в противоестествен вид, против собствения му син. Без да има сили да се състезава с противник толкова млад и могъщ, той завърши с плагиатство”.

Какво се е случило? Отговор на този въпрос има в едно от писмата на Данаил до Ойлер. “Аз загубих плодовете на 10-годишния си труд. Мене напълно ме ограбиха. От моята “Хидродинамика” са взети всички “Твърдения”: баща ми ги е включил в своята “Хидравлика”...”.

През 1742 г. излизат 4 тома събрани съчинения на Йохан Бернули. Събраните съчинения се наричат “пълни”, но в тях има съществени пропуски. Например добре е известно, че Йохан е предал на Лопитал редица лекции по диференциално смятане в писмен вид (1691-1692); тези лекции ги няма в събраните съчинения. Ръкописът е намерен едва през 1921 г. Той, между впрочем, напълно потвърждава думите на Йохан за това, че Лопитал е писал своя знаменит “Анализ на безкрайно малките” (1696) почти не отстъпвайки от неговите лекции. Ще повторим, че общоизвестното “правило на Лопитал” за разкриването на неопределености също му е съобщено от Йохан.

Последната голяма дейност на Йохан Бернули е издаването на неговата кореспонденция с Лайбниц - на тази истинска съкровищница на идеи на новото смятане в течение на неговия най-ранен, почти напълно интензивен период.

През есента на 1747 г., когато Йохан навършва 80 г., неговото здраве започва да се влошава. Но толкова бил силен навикът му да се труди, че той продължава да работи ежедневно до полунощ. На 1 януари 1748 г. умира, оставайки 4 сина, 2 дъщери, 8 внуци и 2 правнуци.

Ако е велика заслугата на братята Бернули за разработването на анализа, то тя е още по-велика, още по-ценна за неговото разпространение. Умирайки, Йохан е могъл да не се безпокои за плодовете на своя труд, на който отдава 60 години от живота си. Той оставя изключително талантливо поколение. Неговите синове (Николай, Данаил и Йохан), Клеро, Крамер и много други подхващат знамето на математиката и, оглавявани от най-способния ученик на Йохан Бернули - великия Ойлер, го понасят напред и все напред.

Бернули, Николай I (10.10.1687-29.11.1759) - племенник на Якоб I и Йохан I Бернули. Роден е в Базел. Бил е професор по математика в Падуа, а след това професор по логика и право в Базелския университет. Работи в областта на теорията на вероятностите и интегралното смятане. През 1713 г. поставя задача, наречена по-късно “Петербургска” (отпечатана е в коментариите на Петербургската АН), имаща принципно значение за разясняване на методите и понятията в теорията на вероятностите. На Николай I Бернули е била известна теоремата за независимост на частните производни от реда на диференциране (1721).

Заедно с други математици се е занимавал с уравнението на Рикати. Водил е кореспонденция с Г. В. Лайбниц и Л. Ойлер.

Бернули, Николай II (27.01.1695-09.08.1726) - син на Йохан I Бернули. Роден е в Базел. От 1725 г. е бил професор по математика в Петербургската АН. Занимавал се е с уравнението на Рикати; в отделни случаи, както и баща му, е прилагал метода на интегрираща множител за решаването на диференциални уравнения от първи ред. Този метод, независимо от Николай II Бернули, прилагат А. Клеро и Л. Ойлер.

Бернули, Данаил (08.02.1700-17.03.1782) - син на Йохан I Бернули и брат на Николай II Бернули. Той е един от най-известните физици и математици на своето време. Роден е в Грьонинген (Холандия). Занимава се с математика под ръководството на баща си и брат си Николай II. Завършва Базелския университет (1716), допълнително изучава медицина, физиология. През 1725 - 1733 г. работи в Петербургската АН. Впоследствие е неин почетен член.


Данаил Бернули

На Данаил Бернули принадлежат важни работи по алгебра, теория на вероятностите, изчисляване на безкрайно малки, теория на редовете, теория на диференциалните уравнения и други раздели на математиката. На него принадлежи определянето на числото e като граница на $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$. Голямо значение имат изследванията на Данаил Бернули по теория на редовете, свързани с проблемите на механиката. В работа за колебанието на струната (1755) той за първи път използва за решаването на съответното частно диференциално уравнение тригонометричните редове, наречени впоследствие редове на Фурие. С името на Данаил Бернули е наречено изведеното от него през 1738 г. уравнение на стационарното движение на идеална течност - основно уравнение на хидро- и газовата динамика. Парижката АН десет пъти присъжда отличия на Данаил Бернули за най-добри работи по въпросите на математиката и физиката, а през 1734 г. той разделя със своя баща двойното отличие за съчинението "За причините за различния наклон на планетните орбити към слънчевия екватор". Това съчинение служи като тласък за прилагане на теорията на вероятностите в приблизителното представяне на изрази, съдържащи много големи числа.

Бернули, Йохан II (1710-1790) - брат на Данаил и Николай II Бернули. Роден е в Базел. Първо е бил професор по красноречие, а след това – по математика в Базелския университет.

Бернули, Йохан III (1744-1807**) -** син на Йохан II. Роден е в Базел. В Берлин е бил кралски астроном. На него принадлежат работи за периодичните десетични дроби и по теория на вероятностите.

Бернули, Якоб II (1759-1789) - племенник на Данаил Бернули, автор на ценни трудове по механика. Роден е в Базел. В Петербург е бил професор по математика, а след това - академик, член на Петербургската АН.

Бесел, Фридрих Вилхелм (F. W. Bessel) (22.07.1784-17.03.1846) - немски астроном, член на Берлинската АН

Фридрих Бесел

Роден е в Минден (Вестфалия). На 20 години изчислява орбитата на кометата Галея. През 1810 г. става професор в университета в Кьонингсберг (доскоро Калининград) и построява там обсерватория, чийто директор е до смъртта си. При обработката на наблюденията Бесел широко използва теорията на вероятностите и метода на най-малките квадрати. На името на Бесел е наречен клас трансцендентни (цилиндрични) функции, въведени в науката от Л. Ойлер през 1766 г., а също така една интерполационна формула, известна по-рано на И. Нютон, и едно от линейните диференциални уравнения от втори ред, разглеждано още от Д. Бернули.

Болцано, Бернард (B. Bolzano) (05.10.1781-18.12.1848) - чешки математик, философ и логик. Роден е в Прага. Отначало учи вкъщи, а след това в гимназия. През 1800 г. завършва философския, а през 1805 г. - теологическия факултети на Пражкия университет с присвояване на научната степен - доктор по философия. През 1805-1820 г. ръководи катедрата по история на религията в Пражкия университет. За изказвания срещу австрийското правителство е отстранен от работа (1820), поставен е под тайния надзор на полицията и е лишен от правото на публични изказвания.

Бернард Болцано

През живота си Болцано публикува само 5 неголеми математически съчинения и редица философски трудове, излезли анонимно. Основната част на голямото ръкописно наследство на Болцано е изследвано от чешки учени след смъртта му. Големият математически труд на Болцано "Учение за функциите", написан през 1830 г., вижда бял свят едва след 100 години. В него, в частност, Болцано (30 години преди Вайерщрас) построява пример на непрекъсната крива, която няма допирателна в нито една своя точка. Той установява съвременното понятие за сходимост на редове и в продължение на няколко години преди излизането на бял свят на "Алгебричния анализ" на О. Л. Коши използва критерия за сходимост, наричан обикновено "критерий на Коши". Теоремата, гласяща, че всяко безкрайно множество от числа, намиращо се в затворен интервал, има в него поне една точка на сгъстяване, Болцано споменава много години преди да бъде формулирана от К. Т. В. Вайерщрас. Уточнявайки понятията граница и непрекъснатост, Болцано за първи път доказва строго теоремата, че непрекъснатата функция приема всяка междинна стойност, лежаща между две нейни стойности. В "Парадокси на безкрайното" (издадени през 1851 г.), написани от Болцано в последните години от живота му, се съдържа дефиницията на безкрайно множество като равномощно на своята правилна част; тук той е предшественик на Г. Кантор - създателя на теорията на множествата. Болцано публикува обширен труд по логика - "Научно знание" (1837), в който развива идеи, изпреварили тези на математическата логика. В началото на 30-те години на 19 век той прави опит да построи теорията на реалните числа, която след някои уточнения съвпада с теорията на Г. Кантор. Приоритетът на метода за обосноваване на аритметиката на естествените числа с метода на математическата индукция, който се свързва с името на Г. Г. Грасман, принадлежи на Болцано. В класическия анализ и в теорията на функциите е известен принципът на избора на Болцано, лемата на Болцано - Вайерщрас за ограничена редица и др.

През 1861 г. е създаден фонд на името на Болцано в Карловия университет. През 1923 г. е създадена комисия за издаване на наследството на Болцано. Списъкът на издадените трудове на Болцано съдържа 83 заглавия. Във философията Болцано стои на позициите на обективния идеализъм. Своите възгледи по социално - политическите въпроси той излага в труда си "За най-добра държава" (1830, публикуван за пръв път през 1932 г.).

Бомбели, Рафаел (R. Bombelli) (ок. 1526-1572) - италиански математик и инженер. В "Алгебра"-та на Бомбели, съставена около 1560 г. и издадена през 1572 г., е дадено първото изложение на правилата на действията с имагинерни величини и тяхното приложение в изследването на така наречения неприводим случай на кубично уравнение. Бомбели усъвършенства правилата за действия с относителни числа и внася някои усъвършенствания в алгебричната символика. "Геометрия"-та на Бомбели е публикувана едва през 1929 г. В нея квадратните и кубичните уравнения се прилагат систематично към задачите от планиметрията. Алгебричните идеи на Бомбели оказват влияние на Г. В. Лайбниц, С. Стевин, Г. К. Баше де Мезирияк. Бомбели е един от първите в Европа превел "Аритметика" на Диофант и, опирайки се на неговите традиции, аксиомотически е въвел отрицателните и комплексните числа. Бомбели е предшественик на Р. Декарт в Европа в "изчисляването" на отсечки.

Вайерщрас, Карл Теодор Вилхелм (K. Th. W. Weierstrass) (31.10.1815-19.02.1897) - немски математик. Роден е в Остенфелд. Не е имал специално висше образование. Изучавал е юридически науки в Бон, но, увлякъл се от математиката, оставил юридическия факултет. През 1841 г. взема изпит за званието учител. През 1842-1855 г. е преподавател по математика в католическите средни учебни заведения в градовете Дейч-Кронс и Броунберг. От 1856 г. е извънреден, а от 1865 г. – редовен професор в Берлинския университет. По-голяма част от работите на Вайерщрас са отпечатани след неговата смърт. Многобройните слушатели на

Карл Вайерщрас

лекциите му от различни страни разпространяват идеите му, докато е бил още жив. Лекциите на Вайерщрас имат огромно значение за развитието на математиката. В тях ученият за пръв път с достатъчна строгост излага редица основни математически понятия.

Лекциите и научните статии на Вайерщрас са посветени на математическия анализ, теорията на аналитичните функции, вариационното смятане, диференциалната геометрия и линейната алгебра. От резултатите в областта на математическия анализ трябва да отбележим: системното използване на понятията горна и долна граници на числови множества; учението за граничните точки; строгото обосноваване на свойствата на напрекъснатите функции; построяването на пример на непрекъсната функция, която няма никъде производна (предшественик на Вайерщрас във всичко това е чешкият математик Болцано); доказателство на теоремата за възможността от разлагане на произволна непрекъсната в затворен интервал функция в равномерно сходящ ред от полиноми и др.

Значително място в изследванията на Вайерщрас заема теорията на аналитичните функции. На него принадлежат: теоремата, че функция, аналитична в кръгов пръстен, може да се разложи в степенен ред по целите положителни и отрицателни степени на променливата (тази теорема независимо от Вайерщрас е получил френският математик П. Лоран; тя носи неговото име); построяването на теореми за аналитичното продължение на функции; теоремата за аналитичност на сумата на равномерно сходящ в някаква област ред от аналитични функции и много други. Голям е приносът на Вайерщрас във вариационното смятане и в линейната алгебра.

На Вайерщрас принадлежи доказателството на теоремата, че комплексните числа образуват единствената комутативна алгебра без делителите на нулата над полето на реалните числа (1872).

Вайерщрас сам се занимава с приложенията на математиката в механиката и физиката и поощрява своите многобройни ученици да работят в това направление. Сред учениците на Вайерщрас са математици като С. В. Ковалевска, К. Шварц, Бруно, И. Фукс и др., също получили голяма известност

Валис, или **Уолис**, **Джон (**J. Wallis) (23.11.1616-28.10.1703) - английски математик, един от основателите на Лондонското кралско дружество. Роден е в Ашфорт (Кентски уезд). Началното и средното си образование получава в частни училища. Завършва богословския факултет на Кембриджския университет. След завършване на университета Валис (Уолис) работи като домашен свещеник в богати дворянски домове, отначало в Кембридж, а от 1643 г. - в Лондон. Математика започва да изучава самостоятелно през студентските си години и продължава да се занимава с нея и след това в свободното си време. Освен работите на своите сънародници, Валис (Уолис) основно изучава работите на Е. Торичели, Б. Кавалиери, Р. Декарт и античните математици. Той превежда и отпечатва работите на Птоломей, Порфирий, Архимед, Аристарх Самоский и Папа Александрийски.

Джон Валис (Уолис)

Валис (Уолис) е изучавал криптография и е прилагал своите знания за дешифриране на различни политически преписки.

От 1645 г. в Лондон започнали да се организират конференции на учените- естественици. Валис (Уолис) взема участие в тях като математик. През 1649 г. той става професор по геометрия в Оксфордския университет. През 1660 г. от кръга учени, в който участва и Валис (Уолис), се образува Лондонското кралско дружество.

Валис (Уолис) е първият английски математик, започнал да се занимава с анализ на безкрайно малките. Неговият главен труд - “Аритметика на безкрайните” (1656), изиграва важна роля в предисторията на интегралното смятане. В него Валис (Уолис), независимо от френските математици П. Ферма и Ж. Робервал, фактически изчислява определените интеграли от степен с произволни рационални показатели и някои други алгебрични функции. Той пръв от математиците на 17 в. аритметизира понятието определен интеграл, разглеждайки го като граница на отношението на числови редици, независимо от понятието лице. Валис (Уолис) не само продължава, но и съществено развива метода на неделимите на Б. Кавалиери. Във връзка със задачата за квадратура на кръга (1655) Валис (Уолис) намира израза: $\frac{4}{\pi}=\frac{1.3.3.5.5.7.7...}{2.4.4.6.6.8.8...}$. Тази формула носи неговото име. За намирането на числото π тя не е много подходяща, но е полезна в редица теоретични разсъждения, например при извода на формулата на Д. Стирлинг.

Исторически формулата има значение като един от първите примери за безкрайни произведения.

В “Трактата за коничните сечения” (1656), който излиза от печат в един том с “Аритметика на безкрайните”, Валис (Уолис) се опитва да покаже преимуществото на аналитичния метод на Р. Декарт пред синтетичния метод на древните математици при излагането на теорията на коничните сечения. Геометричните доказателства той провежда с помощта на алгебрата. В това съчинение Валис (Уолис) за пръв път отчетливо формулира подхода за изчисляване на лицето на криволинейни фигури, само че той обикновено дели интервала на интегриране на равни части. Ученият за пръв път въвежда отрицателните абсциси и правилно ги прилага.

Сериозни са заслугите на Валис (Уолис) и в аритметиката. Във “Всеобща математика или пълен курс по аритметика” (1657) той подробно подрежда различни числови системи и изследва представянето на числа в троична, четворична и др. системи на изчисление.

В “Механика или геометричен трактат за движението” (1670) Валис (Уолис) построява графика на функцията $y = \sin x$; в ”Трактат по алгебра” (1685) се съдържа идеята за геометричното изображение на комплексните числа, изложени са най-важните свойства на периодичните дроби, отделни глави са посветени на приблизителните изчисления, на бинома на Нютон и др.; в “Разсъждения за съединенията” (1685) той намира сумата и броя на делителите на естественото число, за пръв път отбелязва, че така нареченият логаритмичен ред може да се използва при $|x| < 1$.

Валис (Уолис) въвежда знака "∞" за безкрайност, за първи път употребява думите интерпретация, мантиса, интерполиране, непрекъсната дроб.

В своите изследвания ученият не дава пълни доказателства; верността на всички негови многобройни и важни резултати е доказана по-късно. Само в един случай от неравенството $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ за естествените числа Валис (Уолис) прави погрешното заключение (парадокса на Валис (Уолис)), че $\ldots \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \ldots < -\frac{1}{1} < -\frac{1}{2} < \ldots$, откъдето, например следва, че $\infty < -1$.

Математическите работи на Валис (Уолис) оказват влияние върху И. Бароу и И. Нютон.

Весел, Каспер (C. Wessel) (08.06.1745-25.03.1818) - датски математик, по професия землемер. Роден е в Йонсруд (Норвегия). Автор е на работата "За аналитичното представяне на посоките", посветена на векторите в равнината и в пространството и съдържаща първото пълно геометрично построение на теорията на комплексните числа, разглеждани като вектори в равнината. Идеите, съдържащи се в книгата, по-късно се развиват в теорията на кватернионите. Това съчинение, написано на датски език, в течение на столетия е оставало неизвестно на математиците и резултатите на Весел "са се откривали" отново от Ж. Арган, К. Гаус и др.

Витали, Джузепе (G. Vitali) (26.08.1875-29.02.1932) – италиански математик и механик. Работил е в Болоня. Основните му математически работи са в областта на класическия анализ, на теорията на функциите, функционалния анализ и на геометрията. Той първи (1905) формулира свойство на измеримите функции, известно като теорема на Лузин; въвежда понятието "абсолютно непрекъсната функция"; доказва теоремата за покритието, носеща неговото име и която и до сега е основна в съответната част от теорията на функциите.

Гаус, Карл Фридрих (C. F. Gauss) (30.04.1777-23.02.1855) - немски математик, астроном, физик и геодезист. Роден е в Брауншвейг в семейството на водопроводчик, майстор на фонтани и градинар. Още като дете Гаус показва удивителни способности към различни изчисления на ум. Още щом се научава да говори, той започва да мъчи всички околни с въпроси:

Карл Гаус

- А това какво е? А това?

Вземайки в ръка книга, той вижда в нея някакви знаци и веднага се обръща с въпроса:

- Мамо, а това какво е?
- Това са букви.
- А за какво са те?
- За да се чете.

- Хайде, прочети, мамо.

Карл бил удивен: от буквите се образували думи, а от думите цели изречения. А тези изречения могат да разказват за много забележителни неща.

- Мамо, научи ме да чета.

- Не, детенце, за теб е още рано. Когато пораснеш още малко, ще те пратя на училище и там ще научиш тази премъдрост.

На малкия Гаус не му се искало да чака. Питайки, той научил всички букви и, без особена помощ от страна на възрастните, се научил и да чете.

Бащата на Гаус, за да подобри положението си, през лятото се занимавал с допълнителна работа, а в съботите се разплащал с работниците. В една такава събота той пресметнал стойността на извършената работа и сумата, която трябвало да плати. Но, когато се готвел да извърши плащането, от детското креватче се чуло гласче:

- Татко, твоята сметка не е вярна, ти получи толкова, а трябва да е толкова.

Бащата и всички присъстващи били удивени от репликата на тригодишното дете.

- Не, правилно е! Аз смятах доста внимателно, - казал бащата.- Обаче нищо не ми струва да пресметна отново.

Проверявайки всички сметки, бащата не без смущение трябвало да обяви, че е прав не той, а неговият мъничък син.

За своето изкуство да смята наум самият Гаус по-късно на шега казва:

- Аз се научих да смятам по-рано, отколкото да говоря.

На 7 години изпращат Гаус да се учи в народното училище, цялата работа в което се вършела от учителя Бютнер. Телесните наказания на учениците по онова време били обичайно явление. Бютнер имал винаги със себе си камшик, който често играел по гърбовете на немарливите ученици. С този камшик той понякога награждавал и Гаус, тъй като той първоначално с нищо не се отличавал от своите другарчета.

Но работата коренно се променила, когато в училището започнали да изучават аритметика. Още от първите уроци по този предмет Гаус израства в очите на своя взискателен учител и на всички ученици. Веднъж учителят задал следната задача: “Да се намери сумата на всички цели числа от 1 до 100”.

Едва учителят приключил да диктува и се чул гласът на Гаус:

- А аз вече я реших!

При това той сложил своята дъска с решението в средата на масата, както било прието.

Дълго решавали учениците задачата. През това време учителят се разхождал между чиновете и не без ехидство направил на Гаус забележка:

- Карл, ти сигурно си сбъркал! Не може за толкова кратко време да се реши толкова трудна задача.

Уверен във верността на своето решение, Гаус смело отговорил на учителя:

- Извинете, господин учителю! Аз вярно реших задачата.

- Ще видим колко е вярно. А ако е невярно? – И той заплашително ударил с камшика по крака си...

Какво обаче било изумлението на учителя, когато при проверката се оказало, че Гаус е решил задачата съвършено вярно, при това решението се е отличавало с извънредна простота и остроумие.

- Карл, разкажи на класа как си решил задачата, - обърнал се към него учителят.

- Зададената задача, ако внимателно се вгледаме в нея, е много проста. Аз забелязах, че числата от 1 до 100, стоящи на еднакви разстояния от началното и крайното, имат еднаква сума. Използвайки това свойство, аз ги събрах по двойки: 100+1, 99+2, 98+3 и т.н., като сумата всеки път беше 101. Но такива двойки очевидно са 50, следователно цялата сума е 101.50=5050.

Бютнер този ден бил твърде доволен от малкия Гаус. Своя гняв той стоварил на тези ученици, които или съвсем не решили задачата, или я решили грешно.

Помощник на Бютнер в народното училище бил юношата Бартелс. В неговите задължения влизало подострянето на перата и помощта към изоставащите ученици. Цялото си свободно време Бартелс запълвал със занятия по математика. Впоследствие той става виден професор. Известно време работи в Казанския университет и е любим учител на Н. И. Лобачевски.

Бартелс обръща внимание на десетгодишния Гаус и го кани да се занимават заедно с математика. Още тогава у Гаус се поява мисълта да избере математиката за своя бъдеща професия. В гимназиалните години той успешно изучава древните езици и мечтае да стане философ. Обаче математиката удържа връх.

Окончателното решение да стане математик се утвърждава у него, когато той е на 19 години и цяла година учи в Гьотингенския университет. През тази година той прави твърде важно откритие.

Решавайки уравнението $x^{17}-1=0$, той дава построението на правилен 17-ъгълник с помощта на линийка и пергел. На това откритие Гаус придава твърде голямо значение и го цени високо. Не напразно правилен 17-ъгълник, вписан в кръг, той завещава да гравират на неговия надгробен паметник, което е и изпълнено след неговата смърт.

В Гьотингенския университет Гаус учи през 1795-1798 г. Правото на приват-доцент той получава след защита на докторска дисертация (1799), съдържаща първото доказателство на така наречената основна теорема на алгебрата. Към края на пребиваването си в университета Гаус подготвя фундаментално съчинение "Аритметични изследвания" (публикувано през 1801 г.), съдържащо редица важни открития, разнообразни и остроумни доказателства. През 1807 г. той получава катедрата по математика и астрономия в Гьотингенския университет и длъжността директор на Гьотингенската астрономическа обсерватория.

В разнообразното творчество на Гаус органично се съчетават изследвания по теоретична и приложна математика. Работите му оказват голямо влияние на цялото по-нататъшно развитие на висшата алгебра, теорията на числата, диференциалната геометрия, теорията на притеглянето, класическата теория на електричеството и магнетизма, геодезията, на много отрасли на теоретичната астрономия. В "Аритметични изследвания" се съдържат въпроси от теория на числата и висшата алгебра. Покрай общите методи за решаването на уравненията $x^n-1=0$ Гаус установява връзка между тях и построяването на правилни многоъгълници. Той за първи път, след гръцките математици, прави значителна крачка напред по този въпрос, а именно: намира всички такива стойности на n, за които правилният $n-$ъгълник може да се построи с линийка и пергел (ако n е просто, то трябва да има вида $n=2^{2^k}+1$); в частност, както беше отбелязано по-горе, решавайки в квадратни радикали уравнението $x^{17}-1=0$, Гаус дава построението на правилен 17- ъгълник с помощта на линийка и пергел. Тези работи са направени през 1796 г., когато Гаус е на около 19 години. Тогава той, поради постоянните упражнения, достига изумителна виртуозност в техниката на изчисляване. И в най-сложните изчисления почти никога не бърка, тъй като получените резултати проверява по различни начини.

В алгебрата го занимава предимно основната теорема, към която Гаус нееднократно се връща и дава не по-малко от 6 различни доказателства. Всичките са публикувани в работите, отнасящи се към периода 1803-1817 г. Там са въведени и така наречените цели гаусови числа, т.е. числа от вида $a + ib$, където a и b са цели числа.

Във връзка с астрономическите изчисления, основани на разлагането на интегралите на съответните диференциални уравнения в безкрайни редове, Гаус се заема с изследването на въпроса за сходимостта на безкрайните редове, които той свързва с изучаването на така наречения хипергеометричен ред ("За хипергеометричния ред", 1812 г.). Тези изследвания, заедно с основаните на тях работи на О. Коши и Н. Абел, довеждат до прогрес в общата теория на редовете. Астрономическите трудове на Гаус (1800-1820) са също значителни.

В началото на 19 век италианският астроном Д. Пиаци открива първата от малките планети, наречена Церера. Той я наблюдава за кратко. По време на наблюдението тя се приближава до Слънцето и скоро се скрива в неговите лъчи. Опитите на самия Пиаци, а също и на други астрономи, отново да видят Церера не се увенчават с успех. Там, където по тяхно предположение тя е трябвало да се появи, не я откриват. Телескопите били безсилни!

И ето с търсенето на Церера се заема Гаус (той тогава е на не повече от 30 години). В тишината на кабинета си, използвайки данните от първото наблюдение, той изчислява орбитата на тази нова планета и с голяма точност показва нейното местонахождение. Когато астрономите отправят към указаното място своите телескопи, те, за свое най-голямо учудване, намират това, което търсят - Церера.

Оттогава по метода на Гаус започват да откриват все нови и нови планети. Така през 1802 г. астрономът Г. В. Олберс, близък приятел на Гаус, с помощта на математически изчисления открива малката планета Палада.

Гаус написва книгата "Теория на движението на небесните тела" (1809), в която се съдържат положения, дотогава лежащи в основата на изчисляването на орбитите на планети.

При съставяне на детайлна карта на Хановерското кралство (прибл. 1820-1830 г.) Гаус, фактически, създава така наречената висша геодезия, основите на която излага в съчинението "Изследвания за предмета на висшата геодезия" (1842-1847). За геодезическите снимки той изобретява специален уред - хелиотрон. През 1821-1823 г. Гаус публикува така наречения "метод на най-малките квадрати", който широко се използва и понастоящем. Изучаването на формата на земната повърхност изисквало общ геометричен метод за изследване на повърхности. Издигнатите от учения в тази област идеи са изложени в съчинението "Общи изследвания за кривите повърхнини" (1828). В тази работа той въвежда криволинейните координати от произволен вид, доказва така наречената формула на Гаус - Боне за геодезическия многоъгълник.

Изследванията на Гаус в теоретичната физика (1830-1840) са резултат от тясното общуване и съвместната научна работа с В. Вебер. Заедно с Вебер Гаус създава абсолютната система на електромагнитните единици (1832) и построява (1833) първия в Германия електромагнитен телеграф. Гаус създава общата теория на магнетизма, залага основите на теорията на потенциала и пр.

Трудно е да се намери такъв отрасъл на теоретичната и приложна математика, в който Гаус да не е внесъл съществен принос. Затова получава и почетното прозвище "Гьотингенски колос". Много изследвания на Гаус не са публикувани. Научното му наследство чак до Втората световна война внимателно се изучава от Гьотингенското дружество на учените и е издадено в 11 тома. Най-интересни са дневникът на Гаус, а също така материалите по неевклидова геометрия и теория на елиптичните функции. Очевидно ученият е дошъл до идеята за неевклидовата геометрия през 1818 г. Опасението, че тези идеи няма да бъдат разбрани и, изглежда, недостатъчното осъзнаване на тяхната научна важност са причината Гаус да не ги разработи по-нататък и да не ги публикува. Към публикациите на Н. И. Лобачевски за неевклидовата геометрия Гаус се отнася с голямо внимание, но своя оценка за това откритие така и не публикува. Обаче той е инициатор за избирането на Лобачевски за член-кореспондент на Гьотингенското дружество на учените.

Грийн, Джордж (G. Green) (14.07.1793-31.03.1841) - английски математик и физик. Роден е в Снейнтън близо до Нотингам. Математика изучава самостоятелно. Ходи на училище от 1801 до 1802 г. и го напуска, за да участва в пекарския бизнес на баща си. Тъй като училището, което посещава през този период, е било най-доброто и най-скъпото в Нотингам, Грийн научава много през тези четири срока. Изглежда е научил и малко латински, гръцки и френски. Неговият зет Уилям (мъж на сестра му) пише: "Задълбочените му познания по математика скоро надхвърлиха тези на учителя му Роберт Гудакър".

През 1807 г. семейството на Грийн купува парцел в Снейнтън, където си построява вятърна мелница. Бащата на Джордж наема управител за мелницата, а и самият Джордж работи там.

През 1817 г. Грийн-старши построява фамилна къща зад мелницата и цялото семейство се премества там.

Управителят на мелницата Уилям Смит имал дъщеря Джейн Смит. Между Джейн и Джордж се поражда любов и, макар те да не са се женили изобщо, имат седем деца. Тяхната връзка изглежда започва през 1823 г. или по-рано, тъй като първото им дете се ражда през 1824 г.

Грийн се занимава с математика съвършено самостоятелно, усамотявайки се на горния етаж на тяхната мелница.

Сега мелницата на семейство Грийн е реставрирана и на всеки, дошъл в Нотингам, се препоръчва да я посети. (Тези сведения за Грийн са взети от реклама в Internet за мелницата.)

През 1828 г. Грийн публикува своето главно съчинение "Опит за приложение на математическия анализ към теорията на електричеството и магнетизма". В него той въвежда понятието потенциал и развива теорията на електричеството и магнетизма, опирайки се на намереното от него съотношение между интегралите по обем и по повърхнина (формула на Грийн). Също тук за първи път се разглежда частен случай на функция, свързана с аналитичното представяне на решенията на граничните задачи на математическата физика (функция на Грийн). Книгата на Грийн, излязла в незначителен тираж, била малко известна до нейното преиздаване (1845) даже и в самата Англия. През 1837 г. Грийн завършва Кембриджския университет. В математическата физика особено значение имат работите на Грийн за отражението и пречупването на светлината в кристални среди (1839), в които той попътно извежда основните уравнения на теорията на еластичността, изхождайки фактически от закона за запазване на енергията, приложен към деформирано еластично тяло. Не многобройни, но във висша степен важни, неговите трудове са издадени през 1871 г. в Лондон. Талантливият учен е забелязан доста късно - едва през 1839 г. е поканен в катедрата в Кембридж. Сега трудовете на Грийн се отнасят към класическите работи по математика и физика.

Гурсá, Едуард (E. Goursat) (21.05.1858-25.11.1936) - френски математик, член на Парижката АН (1919). Роден е в Ланзак (департамента Ло). Работил е в Тулуза и Париж, бил е професор в Парижкия университет (1897) и президент на Парижкото математическо дружество. Най - голямо значение имат неговите монографии по частни диференциални уравнения от втори ред и работите му по теория на аналитичните функции. На Гурсá принадлежи класификацията на частните диференциални уравнения, основана на вида на техните характеристики. Той поставя задачата за интегрирането на диференциални уравнения при гранични условия, зададени по протежение на техните характеристики (задача на Гурсá); показва, че за да бъде интегралът от функция на комплексна променлива по затворен контур равен на нула, е достатъчно съществуването (в областта, съдържаща този контур) на крайна производна $f'(z)$. Преди Гурсá в условията на теоремата се е въвеждало изискването за непрекъснатост на $f'(z)$. В математическата физика са известни функциите на Гурсá, в геометрията - конфигурацията на Гурсá. С голяма известност се ползва неговият тритомник “Курс по математически анализ”. Гурсá е лауреат на три различни награди на Парижката АН; през 1935 г. той е награден с юбилейния медал на Парижкия университет.

Даламбер, Жан Лерон (J. L. D’Alembert) (16.11.1717-29.10.1783) - френски математик, механик и философ, член на Парижката АН (1741), на Петербургската АН (1764) и на др. академии. Роден е в Париж.

Жан Даламбер

Рано сутринта на 17 ноември 1717 г. било особено студено. Във всичко се е чувствал дъхът на настъпващата зима. Звънарят на Кръглата църква се отправил към камбанарията, за да позвъни за ранната сутрешна молитва. При входа на църквата, на стъпалата, той забелязва някакъв странен предмет, омотан в топъл шал.

- Що за чудо? – помислил си озадаченият звънар.

Огледал се наоколо и като се убедил, че наблизо няма никой, той **с** любопитство разгърнал шала. За свой голям ужас вътре във вързопа намерил премръзнало бебе. За неочакваната си находка звънарят веднага се обадил в полицейския участък.

Явилият се полицейски комисар, вместо да даде подхвърленото дете в детски приют, се разпоредил да го отнесат на един частен адрес. Детето било дадено на многодетната жена на стъклар по фамилия Русо, която с желание се съгласила да осинови детето, да го възпитава и да му даде необходимото образование, като по този начин му помогне да “стъпи на крака". Изглежда, приемайки малкия в своето семейство, тя е знаела предварително от полицията, че откъм материална страна храненичето ще бъде обезпечено добре. Наистина след осиновяването на детето един от родителите, без да разкрива своето име, дава средства за неговото възпитание и образование.

Полицейският комисар нарежда да нарекат намереното момче Жан Лерон в чест на Кръглата църква, където то е намерено. Така под това име расте Жан, докато сам не прибавя към него фамилията Даламбер.

В къщата на съпрузите Русо Жан живее много добре. В семейството той се възпитава наравно с родните им деца. Жената на стъкларя се оказва порядъчна във всяко едно отношение жена. Тя обиква своя осиновен син като роден.

Независимо от добрите грижи от страна на състрадателната жена, Жан расте болнав и бавно се развива. Затова пък поразява с ранното развитие на ума и наблюдателността си.

Виждайки тази ранна проява на умствени способности, съпрузите Русо се постарават да дадат четиригодишния Жан в частен пансион за обучение, където той е до 12 годишна възраст.

Когато Жан навършва 10 години, съдържателят на пансиона се обръща към съпрузите Русо с настоятелната молба да приберат от пансиона момчето, намиращо се под тяхното опекунство, тъй като той е усвоил всичко и няма на какво повече да го научат. Обаче заради горещата молба на Русо, поради крехкото здраве на Жан, го оставят в пансиона още 2 години.

Трябва да се отбележи, че в този пансион, където се възпитава Жан, изучавали само литература, а на математиката не обръщали никакво внимание.

Жан започва да се занимава с математика на 13 години, когато напуска частния пансион. Без учители, почти без книги и даже без да има приятел, с когото да се посъветва, той ходи по библиотеки, получава там известни сведения, а после сам изнамира доказателства и решения.

Увлечението на Жан по математика не се харесва на съпрузите Русо.

- Е, каква полза от математиката, ако тя, освен малката заплата на учителя, повече нищо не е в състояние да даде? - недоволно мърморели те. -Друга работа е медицината, тя дава заплатата на лекаря плюс неизчерпаемите хонорари от приема на болни в дома му.

В края на краищата Жан се предава и се заема с нелюбимата работа. За да не го изкушават математическите книги, той ги занася на съхранение при един от своите приятели. Има намерение да си ги вземе обратно, когато завърши медицина и стане лекар.

- Математическите книги, - казвал той тогава, - ще ми служат за отдих и развлечение.

Но занятията по медицина така му доскучават, че той от време на време вземал от своя приятел по една книга за "сгряване на душата" и по такъв начин пренесъл обратно при себе си всички свои книги.

След това за Даламбер става съвършено ясно, че той не може да се бори със своето призвание. Тогава той изоставя медицината и се "отдава на математиката и бедността". Обаче, занимавайки се с математика, той забравял жизнените несгоди и се смятал за най-щастливия човек в целия свят.

Както вече беше казано, г-жа Русо обичала Даламбер и му желаела само доброто. Тя и не подозирала, че нейният Жан се намира на прага на световната слава. Тя виждала само това, че той много работи, а получава малко изгода от тази работа. Веднъж тя попитала Жан:

- Вие, навярно, винаги ще си останете философ?

- А какво е това философ? - заинтригувано попитал Жан.

- Луд, който се мъчи през целия си живот, за да говорят за него след смъртта му, - съкрушено отговорила тя.

Изучавайки юриспруденция, Даламбер става адвокат. Много време отделя на медицината и на естествените науки.

Жан Лерон Даламбер е велик енциклопедист на 18 век. Той заедно с Д. Дидро съставя 20-те тома на "Енциклопедията на науките, изкуствата и занаятите". В тази енциклопедия той пише разделите, отнасящи се към физиката и математиката. На него принадлежи уводната статия, озаглавена "Очерк за произхода и развитието на науката" (1750), в която дава голям фактически материал и оригинална класификация на всички науки. В първите ѝ томове той помества такива важни статии като "Диференциали", "Уравнения", "Динамика", "Геометрия" и др. Тук в съвременния му смисъл се среща терминът "естествено число".

През 1739 и 1740 г. той представя в Парижката АН два трактата за движението на твърдите тела в течности и за интегралното смятане, за което е избран в състава на нейните членове. В "Трактата за динамиката" (1743) Даламбер за първи път формулира своя знаменит принцип ("принцип на Даламбер"). За "Разсъждения за общата причина на ветровете" (1744 и 1747) Даламбер получава премията на Берлинската АН и е избран за неин член. Голям е неговият принос в астрономията. Основните му математически изследвания се отнасят към теорията на диференциалните уравнения. Той намира решението на частно диференциално уравнение от втори ред, изразяващо напречните колебания на струна. Работите на Даламбер, а също на Л. Ойлер и Д. Бернули, полагат основите на математическата физика. С името на Даламбер са наречени оператор и парадокс. При решаването на едно срещащо се в хидродинамиката частно диференциално уравнение от елиптичен тип Даламбер за първи път използва функции на комплексна променлива. Даламбер и Ойлер първи намират онези основни уравнения, свързващи реалната и имагинерната части на аналитичната функция, които впоследствие започват да наричат уравнения (условия) на Коши - Риман. Даламбер получава ценни резултати в теорията на обикновените линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти и системи такива уравнения от първи и втори ред, предлага начин за решаването на диференциално-функционални уравнения. Смятането с безкрайно малки Даламбер се опитва да обоснове с помощта на теорията на редовете. В теорията на редовете неговото име носи достатъчен признак за сходимост ("критерий на Даламбер"). В алгебрата Даламбер дава първото, наистина не напълно строго доказателство, на основната теорема на алгебрата, което сега се нарича лема на Даламбер.

Даламбер се занимава също така и с литературна дейност и е избран за член на Френската Академия "40 безсмъртни". На него принадлежат и твърде оригинални работи по въпросите на музикалната теория и музикалната естетика.

Дарбу, Жан Гастон (J. G. Darboux) (13.08.1842-23.02.1917) – френски математик, член на Парижката АН (1884), член кореспондент на Петербургската АН (1895) и на много научни дружества, както във Франция, така и в чужбина. Роден е в Ним. Завършва Висшето нормално училище (Ecole Normal). Бил е професор по математика в Колеж де Франс.

Многобройните изследвания на Дарбу се отнасят почти към всички отрасли на физико-математическите знания, но основните трудове са посветени на диференциалната геометрия и диференциалните уравнения. В областта на диференциалната геометрия той получава много важни резултати, отнасящи се до теорията на повърхнините и теорията на криволинейните координати. Систематизирано изложение на получените резултати той дава в своите многотомни "Лекции по обща теория на повърхнините" (1887-1896) и в "Лекции за ортогоналните системи и криволинейните координати" (1898). В тези трудове, освен собствените си резултати, Дарбу излага и резултатите от изследванията по диференциална геометрия на кривите и повърхнините, направени в продължение на 100 години. Геометричните изследвания го довеждат до разглеждането на различни въпроси за интегрирането на диференциални уравнения. В теорията на обикновените диференциални уравнения Дарбу изучава уравненията от първи ред; уравненията, интегруеми с помощта на намерените достатъчен брой частни решения, и алгебрически интегруемите уравненията. В теорията на определените интеграли името на Дарбу носят така наречените горни и долни интеграли, малка и голяма сума и др. Важни резултати Дарбу получава и в теорията на аналитичните функции; той се занимава с разлагането на функции по сферични и по ортогонални функции, в частност, по полиномите на Якоби; на Дарбу принадлежат работи за решаването на уравнение от четвърта степен; работи по алгебрична теория на квадратичните форми. Ученият плодотворно се е занимавал с различни въпроси на кинематиката, равновесието, малките колебания на системи от точки и др. С неговото име са свързани: вектор, тензор, линии, повърхнина, сноп, триедър и др.

Декарт, Рене (R. Deskartes) (31.03.1596-11.02.1650) – френски философ, математик, физик, физиолог. Роден е в голямото френско градче Лае в богатото и древно дворянско семейство на Йоаким Декарт, заемащ поста съветник в местния парламент. Скоро след раждането на Рене умира майка му и грижата за детето е дадена на кърмачката му. Макар детето де се ражда слабо, кърмачката се погрижва за него, запазва живота му и укрепва неговото здраве. До края на своите дни Декарт изплаща на кърмачката си пожизнена пенсия като израз на своята признателност към нея.

Рене Декарт

Декарт бил надарено дете и още в детската си възраст сред роднини и познати спечелва славата на “малък философ”. На 8 години постъпва в езуитската колегия Ла-Флеш, предназначена за децата на френското дворянство. В тази колегия Декарт е до 1612 г., т.е. почти 9 години, и добре изучава гръцки и латински езици, а също така математика и философия.

След завършването на колегията няколко години изучава юридическите науки - до 1617 г., когато постъпва на военна служба. Военната кариера позволява на Декарт да посети различни страни – Германия, Италия, Холандия, и да установи там лични контакти с учените. Но и в униформата на офицер той си остава математик. Затова може да се съди по следния случай: през 1617 г. като 20-годишен офицер, разхождайки се по една от улиците на холандското градче Бреда, Декарт вижда група хора, стълпили се около стена, на която бил залепен някакъв афиш. Едни записвали нещо в бележниците си, други стояли замислени, изглежда правели на ум сложни изчисления. Някои спорили помежду си и се опитвали нещо да доказват един на друг.

Декарт не без интерес попитал случайния си съсед:

- Какво означава всичко това?

- О! - отговорил онзи. - Не искате ли да опитате щастието си и да решите предложената задача?

- За каква задача говорите?

- Да, разбира се, за онази, която е написана на афиша. Вероятно вие сте чужденец и не знаете нашите нрави. В Холандия отдавна е прието да се дават математически задачи за решаване върху афиш – това е един от начините за научни връзки и публикации. Дадената задача, която вие можете да прочетете, предлага на публиката някакъв неизвестен математик.

Приближавайки се по-близо до афиша, Декарт видял текста на задачата, написан на фламандски.

- Колко жалко, че аз не чета на фламандски!

- Но аз ще ви я преведа на френски. – И непознатият превел предложената задача на френски език.

- Още тази вечер аз непременно ще реша тази задача - заявил Декарт.

- Това ще бъде твърде любопитно. Но помнете, че “орехчето” не е от лесните. Ако вие наистина намерите решение, то бъдете любезни да ми го съобщите на еди-кой си адрес на името на Бекман.

Оказало се, че младият Декарт е разговарял с холандския учен Бекман. И какво било учудването на този учен, когато на другия ден сутринта той получил от Декарт пълното решение на задачата.

Под ръководството на Бекман Декарт в продължение на две години изучава математика. Оставайки военната служба (1621), Декарт пътешества, посещавайки Хага, Брюксел, Италия. През 1625 г. той се завръща в Париж и става активен член на кръжока на учените, събиращи се у М. Мерсен (училищен другар на Декарт, благодарение на когото Декарт усилено се заема с науките и, преди всичко, с математиката). Расте и неговата репутация на философ.

Философските идеи на Декарт намират много поклонници, но предизвикват неодобрението на йезуитите. През 1628 г. Декарт се премества в Холандия - най-напредничавата по онова време капиталистическа страна. Там той живее около 20 години. Но и тук бива притесняван от протестантските богослови, макар и да не изказва открито своите възгледи за сътворението и развитието на Вселената, които съвпадат с тези на осъдения Галилео Галилей.

За да избегне неприятностите, Декарт приема поканата на шведската кралица Христина и се премества в Стокхолм, където пристига в началото на октомври 1649 г. Кралицата посреща прославения учен твърде ласкаво, моли го да ѝ дава уроци по философия и да участва в организирането на научна академия, имайки предвид да го направи президент на тази академия. Декарт работи върху устава на академията.

За съжаление желанието на кралицата не се осъществява. По онова време зимата била студена и Декарт, непривикнал към суровия климат, се простудява силно и ляга болен. Лекарите откриват възпаление на белите дробове. След 9 дни, на 11 февруари 1650 г., в 4 часа сутринта, Декарт почива. Погребан е в католическото гробище, а на гроба му е поставен паметник с неговите заслуги. Шестнадесет години след неговата смърт, по искане на френското правителство, останките на Декарт са пренесени във Франция, Париж, и тържествено погребани в църквата "Св. Женевиева", сегашния Пантеон; обаче било забранено произнасянето на речи, а последователите на философията на Декарт били подлагани на преследвания до края на 17 век.

Основни произведения на Декарт са: "Правила за ръководство на ума" (около 1628 г., издадено през 1701 г.), "Трактат за света" (1633 г., издаден през 1664 г.), "Разсъждение за метода" (1637), "Метафизически размишления за първата философия" (1641), "Начала на философията" (1644), "Страсти на душата" (1649).

Философските възгледи на Декарт са подлагани на преследвания от страна на служителите на църквата - както католическите, така и протестантските. През 1663 г. съчиненията на Декарт са внесени от Ватикана в "Индекса на забранените книги".

Във физическите възгледи за природата ученият развива материалистическата гледна точка. Декарт смята, че светът е материален, има измерение и механично движение. На него принадлежи смелата за онова време хипотеза за миналото на нашата планета и на цялата Слънчева система. Той предполага, че Вселената се е развила от първоначалния хаос. След това в течение на много време движението на материалните частици се е подредило и е придобило характера на центробежни вихрови движения, в резултат на които са се образували космическите тела - Слънцето и звездите, планетите и кометите. С това, всъщност, той обяснява защо видимите планети, въртейки се около своите оси, се движат около Слънцето като около централно тяло.

Особено много е направил Декарт в областта на математиката. Трудно е да се оцени неговият трактат “Геометрия” (1637). В тази работа за пръв път в науката се разглеждат променливи величини и функции. Променливата величина се появява при Декарт като отсечка с променлива дължина и постоянна посока (текуща координата на точка, описваща със своите движения крива) и като непрекъсната числова променлива, пробягваща съвкупност от числа, съставляващи координатна отсечка. Двоякият образ на променливата обуславя взаимното проникване на геометрията и алгебрата, към което се е стремял Декарт. Алгебрата на Декарт, за разлика от алгебрата на Ф. Виет, има винаги един основен елемент - линейната отсечка, операциите над която водят отново до някаква отсечка. Тези отсечки по свойствата си са равносилни на реалните числа. По такъв начин при Декарт реалното число се появява като отношение на отсечка към единичната отсечка, макар такава дефиниция на числата формулира по-късно И. Нютон. При Декарт отрицателните числа получават реално тълкуване във вид на насочени отсечки. Той въвежда общоприетите сега знаци за променливи и търсени величини ($x, y, z, \ldots$) и за буквените коефициенти ($a, b, c, \ldots$), а също така за степените $\left(x^3, a^5, \ldots\right)$. Записът на формулите в алгебрата на Декарт почти не се различава от съвременния. Голямо значение за формулирането на общите теореми на алгебрата има записът на уравнения, при които в едната от страните стои нула. Декарт полага началото на изследванията на свойствата на уравненията; формулира положението за това, че броят на реалните и комплексни корени на уравнението е равен на неговата степен (това е основната теорема на алгебрата, която строго е доказана от К. Гаус в края на 18 век, а е изказана още от А. Жирар). На Декарт принадлежи “правилото на знаците” (правило на Декарт), по което може да се пресметне броят на положителните и отрицателни корени на произволно алгебрично уравнение.

Декарт, независимо от своя сънародник Пиер Ферма, е първооткривател на аналитичната геометрия, в основата на която лежи изобретеният от него метод на координатите (декартови координати), позволяващ да се превеждат геометричните образи на езика на алгебрата, т.е. на езика на уравненията.

В труда си “Геометрия” Декарт излага алгебричен метод за построяване на нормали и допирателни към равнинни (алгебрични) криви и го прилага в частност към някои криви от 4-та степен - така наречените овали на Декарт.

От кореспонденцията на Декарт се вижда, че той е направил и много други открития. С името му са свързани и такива понятия като координати, произведение, парабола, лист, овал и др.

Макар Декарт да полага основите на аналитичната геометрия, самият той не се придвижва далече в тази област. Неговата координатна система е несъвършена - в нея не се разглеждат отрицателни абсциси. Почти незасегнати остават въпросите на аналитичната геометрия в тримерното пространство. Но независимо от това, "Геометрия" на Декарт оказва огромно влияние за развитието на математиката и механиката в следващите векове и особено в първите 150 години след смъртта на великия учен, когато алгебрата и аналитичната геометрия са развиват преимуществено в направленията, посочени от Декарт.

Дирихле, Петер Густав Лежен (P. G. L. Dirichlet) (13.02.1805-05.05.1859) - немски математик. Роден е в Дюрен. През 1822-1827 г. Дирихле е частен учител в Париж. Участва в кръжока на младите учени, които се групират около Ж. Фурие. През 1827 г. Дирихле получава място на доцент в Бреслав; от 1829 г. работи в Берлин. През 1831-1855 г. е професор в Берлинския университет, а след смъртта на К. Гаус (1855) - в Гьотингенския университет. Дирихле прави редица крупни открития в теория на числата: установява формули за броя на класовете на бинарните квадратични форми с дадена детерминанта и доказва теорема за безкрайния брой на простите числа в аритметична прогресия от цели числа, първият член и разликата на която са взаимно прости числа. За решаването на тези задачи ученият използва аналитични функции, наречени функции (редове) на Дирихле. В областта на математическия анализ той пръв формулира точно и изследва понятието условна сходимост на ред, дава строго доказателство на възможността за разлагане в ред на Фурие на по части непрекъсната и монотонна функция, което служи като обосновка на много по-нататъшни изследвания. Значителни са трудовете на Дирихле в механиката и математическата физика, в частност, в теорията на потенциала. С неговото име са свързани задача, интеграл, принцип, характер, редове и много други.

Лекциите на Дирихле имат огромно влияние върху видни математици от по-късно време, в това число на Г. Риман, Ф. Айзенщайн, Л. Кронекер, Ю. Дедекинд и др.

Дюамел, Жан Мари Констант (J. M. C. Duhamel) (05.02.1797–29.04.1872) – френски математик, член на Парижката АН (1840). Бил е професор по анализ във Висшето нормално (Ecole Normal) и в Политехническото училища (Париж). Основните му трудове са изключително в областта на математическата физика (принцип на Дюамел). Ученият съществено подобрява начина на излагане на анализа на безкрайно малките. Издаденият от него през 1840–1841 г. курс по анализ много пъти се преиздава във Франция и е преведен на руски и немски езици. Със същата популярност се ползва и работата му "Курс по механика" (1845–1846).

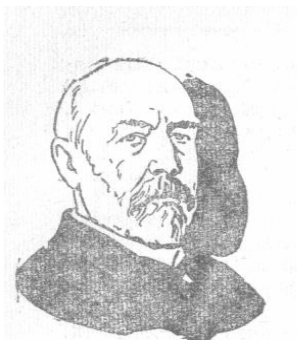
Жордан, Камил Мари Енмон (C. M. E. Jordan) (05.01.1838-21.01.1922) – френски математик, член на Института на Франция (1881).

Камил Жордан

Роден е в Лион. Завършва Политехническото и Минното училища. Работи в Политехническото училище и в Колеж де Франс. През 1885-1921 г. е издател на френското математическо списание, член-кореспондент на Петербургската АН (1895). Работите на Жордан се отнасят към алгебрата, теория на числата, теория на функциите, геометрията, топологията, диференциалните уравнения и кристалографията. С неговото име е свързана теоремата на Жордан – Хьолдер за композиционни редове от групи, нормална (Жорданова) форма на матриците, крива, теорема, мярка и др. Жордан въвежда понятието функция с ограничена вариация; написва първия систематизиран курс по теория на групите и теория на Галоа (1870); "Трактат за субституциите и алгебричните уравнения"; разяснява и допълня твърде кратките и сбити изследвания на Е. Галоа и ги прави достояние на широките математически кръгове; изучава линейните групи и техните подгрупи; въвежда понятието факторгрупа; първи изследва безкрайните групи. По неговия тритомен "Курс по анализ" (1882-1887) в Петербургския университет се изучават диференциално и интегрално смятане, а също и приложенията на анализа в геометрията. В геометрията Жордан изследва въртенето на n-мерно пространство, формулите на Френе в n-мерно пространство и др.

Казорати, или **Касорати**, **Феличе** (F. Casorati) (17.12.1835-11.09.1890) – италиански математик. Роден е в Павия и е бил професор в университета там. Работите му се отнасят до теория на функциите. В частност едновременно с Ю. В. Сохоцки той формулира и доказва теоремата за поведението на аналитична функция в околност на съществената особена точка. Тази теорема често се нарича теорема на Вайерщрас или Казорати - Вайерщрас. Известни са също така и неговите работи по обикновени диференциални уравнения и история на математиката. Казорати е автор на учебници и монографии.

Кантор, Георг (G. Cantor) (03.03.1845-06.01.1918) – немски математик, създател на теорията на множествата. Роден е в Петербург.



Георг Кантор

През 1867 г. завършва Берлинския университет. През 1872-1913 г. е професор в университета в Гал. Кантор разработва теорията на безкрайните множества и теорията на трансфинитните числа (обобщено понятие на редните числа за безкрайните множества); доказва неизброимостта на множеството на всички реални числа (1874), установявайки по този начин съществуването на нееквивалентни (т.е. имащи различни мощности) безкрайни множества; формулира общото понятие мощност на множество (1878); развива принципа за сравняване на мощности на множества и доказва еквивалентността на множеството от точки на линеен затворен интервал и точките на n-мерно многообразие. Кантор систематично излага принципите на своето учение за безкрайността, доказва съществуването на трансцендентните числа, използвайки съображенията за мощност на множества (1879-1884). Той въвежда понятието гранична точка на производно множество; развива една от теориите на ирационалните числа; формулира аксиомата за непрекъснатост, наречена с неговото име; получава резултати по проблема за единствеността на тригонометричните редове. Създадената от Кантор теория на множествата (някои идеи на която е имало у негови предшественици и в частност били сравнително подробно разработени от Б. Болцано) не само лежи сега в основите на математическия анализ, но е послужила като причина за общото преразглеждане на логическите основи на математиката и е оказала влияние на цялата ѝ съвременна структура. В теорията на числата Кантор се занимава с проверката на проблема на Х. Холдбах за четните числа (до 1000), представянето на числата във вид на безкрайни произведения и др. въпроси.

Кардано, Джироламо или **Меронимус** (G. Cardano) (24.09.1501-21.09.1576) - италиански математик, философ и лекар. Роден е в Павия. Учил е в университетите на Павия и Падуа. Като млад се занимава изключително с медицина. През 1534 г. става професор по математика в Милано и Болоня.

В математиката с името на Кардано обикновено се свързва формулата за решаване на кубичното уравнение, която той заимства от Н. Тарталя. Тази формула е публикувана в неговата книга "Великото изкуство, или за правилата на алгебрата" (1545). Оттогава Тарталя и Кардано стават смъртни врагове, а формулата се нарича формула на Кардано. В това съчинение систематизирано са изложени съвременните на Кардано методи за решаването на уравнения, предимно кубични. На учения принадлежат редица важни открития, от които трябва да се отбележат линейното преобразование, позволяващо да се приведе кубичното уравнение във вид, в който не участва членът от втора степен, а също указанията за зависимостта между корените и коефициентите на уравнението, за делимостта на многочлена на разликата $x-a$, ако a е негов корен. Кардано е един от първите в Европа, който допуска съществуването на отрицателни корени на уравненията. В неговите работи за първи път се появяват имагинерните величини. В механиката той се занимава с теорията на лостовете и тежестите. Едно от движенията на отсечка по страните на правия ъгъл в механиката се нарича "карданово движение". Трябва да отбележим, че във "Великото изкуство" е публикувано и решението на уравнение от 4-та степен, за което Кардано пише, че то принадлежи на неговия ученик Л. Ферари. Това произведение дава основание да се смята, че Кардано е един от основоположниците на буквената алгебра.

Кели или **Кейли, Артур** (A. Cayley) (16.08.1821-26.01.1895) - английски математик. Роден е в Ричмънд. Детството и юношеството си прекарва в Петербург. През 1841 г. завършва Кембриджския университет. В продължение на 20 години работи като адвокат. През този период се появат почти всички негови математически работи. От 1863 г. е професор в Кембриджския университет.

Кели полага основите на съвременната алгебрична геометрия, въвежда проективното мероопределяне, основано на разглеждането на алгебрични квадратични форми, и установява връзка между теорията на инвариантите и проективната геометрия. Изследванията на Кели в тази област са залегнали в основата на тълкуването на геометрията на Н. И. Лобачевски (интерпретацията на Кели - Клейн). В съчинението “Глави на аналитичната геометрия на n измерения” (1843) той дава геометрично тълкуване на уравненията от първа и втора степен с n аргумента. Кели е автор на работи по алгебра, диференциални уравнения, елиптични функции; в частност, въвежда понятието симетрични и полусиметрични детерминанти; създава алгебрата на матриците (този термин също принадлежи на Кели); изразява дискриминантата на многочлен чрез сумата на степените на корените; въвежда понятието абстрактна група и т.н. Занимава се, също така, и със сферична астрономия и астрофизика. Трудовете на Кели са издадени в 13 големи тома. С името на Кели са свързани: таблица, числа, алгебра, преобразование, повърхнини, крива и др.

Коши, Огюстен Луи (A. L. Cauchy) (21.08.1789-23.05.1857) - френски математик, член на Парижката АН (1816), на Петербургската АН (1831). Роден е в Париж. Пръв негов учител и възпитател е бил баща му. Коши завършва Политехническото училище (1807) и Училището за мостовете и пътищата (1810) в Париж. Известно време работи като инженер на пътищата и съобщенията, а от 1813 г. се заема с научна работа и преподаване. Назначен е за член на АН вместо Г. Монж. През 1816 г. мемоарът на Коши по теория на вълните на повърхността на тежка течност получава първа награда на конкурса на Парижката АН, след което Коши е поканен в Политехническото училище, Сорбоната и Колеж де Франс. През 1830 – 1838 г. Коши пътешества по Европа, в Париж се завръща през 1838 г., но поради неприязън към новия режим се отказва от различни научни длъжности, не желаейки да полага клетва, докато не му предложат катедра “без условия”.

Огюстен Коши

Работите на Коши се отнасят към различни области на математиката. Имало е периоди, когато той всяка седмица е представял в Парижката АН нов мемоар. Написва и публикува повече от 800 работи по аритметика и теория на числата, алгебра, математически анализ, диференциални уравнения, теоретична и небесна механика и т.н. Бързината, с която Коши преминава от един предмет към друг, отчасти му дава възможност да прокара в математиката множество нови пътища. Неговите “Курс по анализ” (1821), “Резюме на лекциите по изчисляване на безкрайно малките” (1823), “Лекции по приложенията на анализа в геометрията” (1826-1828), основани на систематичното използване на понятието граница, служат за образец на повечето курсове от по-късно време. В тях той дава дефиниция на понятието непрекъснатост на функция и коректно излага теорията на сходящите редове (в частност, за първи път установява точните условия за сходимост на реда на Тейлор към дадената функция и показва ясно различието между сходимост на този ред въобще и сходимостта му към дадената функция; въвежда понятието радиус на сходимост; доказва теоремата за произведението на два абсолютно сходящи реда и т.н.); дава и дефиниция на интеграла като граница на суми; доказателството за съществуване на интеграли от непрекъснати функции и др. Голяма е заслугата на Коши за това, че развива основите на аналитичните функции на комплексна променлива, заложени още през 18 век от Л. Ойлер и Ж. Даламбер. Особено важно значение имат такива резултати, получени от Коши, като геометрично представяне на комплексна променлива като точка, преместваща се в равнината по един или друг път на интегриране (тази мисъл още по-рано е изказана от К. Гаус и др.); изразяването на аналитична функция във вид на интеграл (интеграл на Коши), а оттук разлагане на функцията в степенен ред; разработка на теорията на резидуумите и нейното приложение към различни въпроси на анализа и др.

В областта на теорията на диференциалните уравнения на Коши принадлежат: постановката на една от най-важните общи задачи на теорията на диференциалните уравнения (задачата на Коши), основните теореми за съществуване на решения за случая на реални и комплексни променливи (за последните той развива метода на мажорантите) и метода на интегриране на частни диференциални уравнения от първи ред (метод на Коши - метод на характеристиките). В геометрията Коши обобщава теорията на многостените, дава нов метод за изследване на повърхнина от втора степен, изследва допиране, ректифицируемост и квадратура на кривите, установява правилата на приложението на анализа в геометрията, а също така уравненията на равнина и параметричното представянена на права в пространството и т.н. В алгебрата той по свой начин доказва основната теорема в теорията на симетричните полиноми, развива теорията на детерминантите, намирайки всички главни техни свойства, в частност, теоремата за умножение (при това Коши изхожда от понятието знакопроменлива функция). Тази теорема той разпространява за матриците. На Коши принадлежи термина "модул" на комплексното число, "спрегнати" комплексни числа и др. Той обобщава теоремата на Щурм върху комплексните корени. На Коши принадлежат много резултати от теория на числата, изследвания по тригонометрия, механика, теория на еластичността, оптика, астрономия и т.н. Коши е бил член на Лондонското кралско дружество и на почти всички академии на науките. Пълните събрани съчинения на Коши са издадени от Парижката АН.

Пиер Лаплас

Лаплас, Пиер Симон (P. S. Laplace) (23.03.1749-05.03.1827) - френски математик, физик и астроном, член на Парижката АН (1785), на много други академии и дружества, чуждестранен почетен член на Петербургската АН (1802). Роден е в Нормандия. Учи в училището на монашеския орден на бенедиктинците. В съвършенство изучава древните езици, литературата и изкуството, изучава също така математика и астрономия. Захващайки се с математика, Лаплас не само изоставя занятията по теология, но става и убеден атеист. Със своите философски възгледи е близък до френските материалисти.

Научната дейност на Лаплас е изключително разнообразна. На него принадлежат многобройни фундаментални изследвания по математика, експериментална и математическа физика и небесна механика. В областта на математиката Лаплас създава работи по теория на диференциалните уравнения (уравнение на Лаплас), в частност по интегриране на частни диференциални уравнения (каскаден метод на Лаплас). Той подробно изучава уравнението $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, наречено "уравнение на Лаплас", на което се основава решението на задачата на теорията на потенциала, топлопроводността, електростатиката и хидродинамиката. Лаплас развива и систематизира резултатите, получени от Б. Паскал, П. Ферма, Я. Бернули и др. математици по въпросите от теорията на вероятностите; усъвършенства методи на доказателства; доказва важна гранична теорема, която се нарича "теорема на Лаплас - Моавър" (А. Моавър през 1730 г. я изказва само за частни случаи); развива теорията на грешките; обосновава (1811), макар и не строго, метода на най-малките квадрати. През 1799 г. предлага метод на минималното приближение на функции, който след това е опростен от Ла Вале Пусен. Теорията на вероятностите в значителна степен се сформира именно в работите на Лаплас. Той въвежда теоремите за събиране и умножение на вероятности, понятието производящи функции, математическо очакване. Още приживе, три пъти се издава неговата "Аналитична теория на вероятностите" (1812).

Съвместните изследвания на Лаплас и Лавоазие се отнасят до топлопроводността, разширяването на телата при нагряване, горенето на водорода в кислород и т.н. Лаплас публикува редица работи по теория на капилярността (1806); развива работите на И. Нютон, които се отнасят до определянето на скоростта на звука във въздуха; дава барометрична формула за изчисляване на изменението на плътността на въздуха с изменението на височината над повърхността на Земята. Освен това той се занимава с въпросите на електродинамиката, разработва математическите проблеми на теорията на потенциала, намира сферически функции на две променливи. Лаплас развива методите на небесната механика и завършва обяснението за движението на телата в Слънчевата система на основата на закона за всемирното привличане на Нютон. През 1780 г. той предлага нов метод за изчисляване на орбитите на небесните тела. Доказва, че пръстенът на Сатурн не може да бъде плътен и изказва предположението за силното сплескване на Сатурн около полюсите. Лаплас разработва теорията на движението на спътниците на Юпитер (1789), открива причината за ускорението на движението на Луната (1787), определя величината на сплескването на Земята около полюсите. На Лаплас принадлежи и разработката на динамичната теория на приливите. Резултатите от изследванията в областта на небесната механика са обобщени в класическия "Трактат за небесната механика" (1798-1825).

Лайбниц, Готфрид Вилхелм (G. W. Leibnitz) (01.07.1646-14.11.1716) - немски математик, физик и философ, организатор и първи президент на Берлинската АН (1700), член на Лондонското кралско дружество (1673), член на Парижката АН (1700).

В средата на 17-то столетие Германия представлявала в научно отношение дълбока провинция. В това време, когато в Италия, Франция, Англия се слагат основите на естествените науки (Галилей, Торичели, Ферма, Декарт, Валис (Уолис), Бойл и др.), Германия дава на света само един гений - Йохан Кеплер. След неговата смърт Германия замълчава за много десетилетия, докато не засиява с ярка светлина името на Лайбниц, на когото е съдено да даде мощен тласък на европейската наука.


Готфрид Лайбниц

Готфрид Вилхелм е роден в Лайпциг на 1 юли 1646 г. Неговият баща - Фридрих Лайбниц бил професор по етика и юрисконсулт на Лайпцигския университет. Майка му - Катерина Шмуке била дъщеря на професор в същия университет.

Готфрид няма още 7 години, когато загубва баща си и остава само с майка си, умна и практична жена. Майка му си поставя за цел да даде на сина си солидно образование и да направи от него учен човек. Веднага след смъртта на мъжа си тя записва своя син Готфрид в най-доброто училище в Лайпциг, където той скоро показва твърде значителни способности към различни измислици и изобретения.

Едва дванадесетгодишно, момчето изобретява интересен метод за изучаване на римските автори в оригинал без помощта на речник и без съдействието на учителя. Още тогава той се старае да проникне в тайната на Вселената и по единични наблюдения да прави общи изводи.

В обкръжаващия го свят на вещи и явления Лайбниц обича да намира “единство и хармония” и е много радостен, когато долавя общата цел на различните науки. По негово мнение не човекът съществува за науката, а обратно - науката за човека. Учителите виждали философската дарба на детето и му предричали блестящо бъдеще.

В училище Готфрид поразява всички учители и с още една способност - с поетичното дарование да пише стихове на латински и гръцки езици. По такъв начин младият Лайбниц бил не само философ, но и поет.

Когато става на 14 години, той започва да се интересува от въпросите на логиката и дълго размишлява над нейните задачи и съдържание.

На 15 години става студент в Лайпцигския университет, където някога е работил неговият баща. Официално той се води слушател в Юридическия факултет, но неговите интереси излизат далече извън рамките на юриспруденцията. Той много се занимава с философия и математика. В университета се запознава с работите на Аристотел и Р.

Декарт. Защитава дисертации за степен бакалавър (1663), магистър по философия (1664) и доктор по право (1666). Бил е на юридическа и дипломатическа служба в двора на Майнцския херцог. Там той привежда в ред "Свод на законите", продължавайки едновременно да се занимава с философия, и написва няколко юридически и философски работи, от които една - "Теория на абстрактното виждане", представя в Парижката АН, а втората - "Теория на конкретното движение", - в Лондонското кралско дружество.

В Майнц Лайбниц прекарва 5 години. През 1672 г. той заминава за Париж в качеството на възпитател в семейството на дипломата Бойнебург и едновременно с дипломатическо поръчение до Луи XIV. Творческата дейност на Лайбниц се разгръща именно в този период в Париж, където той много работи и лично се запознава с много математици, в частност, с Х Хюйгенс, под ръководството на който изучава работите на Г. Галилей, Р. Декарт, П. Ферма, Б. Паскал и на самия Хюйгенс. Математическият гений на Лайбниц пламва изведнъж и с невиждана сила.

По описанието на съвременниците му Лайбниц бил слаб, среден на ръст. Неговото бледо по природа лице, подчертано от черните коси на перуката, изглеждало още по-бледо. На пръв поглед той правел впечатление на доста невзрачен човек. Веднъж неговата не внушителна външност станала повод за следното недоразумение: намирайки се в Париж, Лайбниц влязъл в една книжарница с надеждата да купи там една от книгите с философско съдържание на свой познат. Когато той поискал от продавача тази книга, онзи, оглеждайки го от главата до петите, насмешливо попитал:

- За какво ви е тя? Нима вие сте способен да четете такива книги?

Не успял Лайбниц да отговори, когато в магазина влязъл авторът на книгата и любезно поздравил учения:

- На великия Лайбниц поздрав и уважение!

Продавачът се сконфузил. Той въобще не очаквал, че пред него е живият Лайбниц, книгите на когото се ползвали с такова търсене сред парижките учени.

Лайбниц имал в известен смисъл избирателна памет. Някои неща той запомнял много добре, а някои – лошо; при това запомнял отлично това, което се отдавало с голям труд, а по-лошо това, което се усвоявало съвсем леко.

По природа ученият бил с избухлив, но с не злоблив характер. Той не помнел злото и не можел дълго да се сърди. От детските си години бил късоглед и не се отличавал, както той сам казвал, с голямо въображение. Обожавал децата, но не създава семейство – през целия си живот остава ерген. Веднъж, когато бил петдесетгодишен, той прави предложение на една дама, но тя го помолила да почака малко. През това време Лайбниц размислил и трябвало да си признае:

- До сега си въобразявах, че винаги ще успея да се оженя, а сега, оказва се, съм закъснял.

Лайбниц охотно пътешества и обича непринудените разговори с хора от различни професии.

Пътешествайки из Италия, Лайбниц се отправя от Венеция към остров в Адриатическо море. Той бил единствен пътник в лодката. Вдигнала се страшна буря, която много изплашила моряците. Кормчията решил, че пътникът е безбожник и че неговото присъствие в лодката е единствената причина за бурята. Той споделил своето предположение с моряците, които веднага се съгласили с него. Мислейки, че немецът не разбира италиански, моряците високо разсъждавали за това веднага да го хвърлят във водата. Но Лайбниц, който знаел италиански, разбрал всичко. Какво да прави? Не давайки вид, че разбира намеренията на моряците, той извадил от своя джоб броеница, с която се бил запасил предварително, познавайки фанатизма на венецианците, и, шепнейки молитва, започва усърдно да прехвърля топчетата ѝ.

Ефектът не закъснял. Моряците престанали да смятат Лайбниц за безбожник. За щастие и морето започнало забележимо да се успокоява.

Особено голямо влияние върху творчеството на Лайбниц оказва запознаването му с работите на Паскал. Известният "характеристичен триъгълник" на Паскал изиграва ролята на прожектор, който мигновено осветява общия метод за построяване на допирателни, така че Лайбниц пише след това, че му е непонятно как е могъл Паскал да недогледа какво богатство е заключено в неговото изобретение!

Вече през 1673 г. собствените резултати на Лайбниц са толкова значителни, че той решава да замине за Лондон и да се запознае там "от първа ръка" с английските математически постижения. В Лондон той демонстрира в Кралското дружество и своята изчислителна машина (аритмометър). Вероятно Лайбниц е направил в Лондон добро впечатление, защото скоро го избират за член на Лондонското кралско дружество.Там той се запознава с трудовете на И. Нютон. Наред с Нютон, но независимо от него, завършва разработката на диференциалното и интегрално смятане, съставляващи най-първата основа на цялата съвременна висша математика. На Лайбниц напр. принадлежи по-обстойното, отколкото у Нютон, решение на някои въпроси на висшата математика и по-ясната символика и терминология, съхранили се и до сега. В частност названията “диференциал” и “интеграл” са за първи път въведени от Лайбниц.

През 1676 г. Лайбниц се връща от Лондон в Париж, където разработва важни въпроси на диференциалното смятане. В същата година заминава за Хановер, където отначало работи като библиотекар, а после като историограф на Хановерския херцог. Обаче дейността на Лайбниц излиза далече извън пределите на официалните му задължения. Той се занимава с въпросите на химията, геологията, конструира вятърен двигател за помпа, изпомпваща водата от шахтите.

Особено плодотворна е научната дейност на Лайбниц в областта на математиката. През 1666 г. той публикува своята първа математическа работа “Размишления за комбинаторното изкуство”. Конструираната от него изчислителна машина изпълнявала не само събиране и изваждане, както това било у Б. Паскал, но и умножение, деление, вдигане на степен и извличане на квадратни и кубични корени. Повече от 40 години Лайбниц посвещава на усъвършенстването на своето изобретение. Именно за това може да бъде считан за идеен вдъхновител на съвременната компютърна математика.

Лайбниц полага основите на символната логика. Изследва свойствата на някои криви, разлагането на функции в редове, въвежда понятието детерминанта и издига някои идеи, отнасящи се до теорията на детерминантите, които впоследствие развиват А. Вандермонд, О. Коши, К. Гаус и окончателно разработва К. Якоби. Ученият, в известна степен, прокарва път на такива нови дисциплини като политическа икономия и сравнително езикознание. Но най-важната му заслуга е, както беше казано по-горе, че той, едновременно с И. Нютон, но независимо от него, завършва създаването на диференциалното и интегрално смятане. Знакът на интеграла в съвременния му вид за първи път се среща в неговата работа “За скритата геометрия“ (1686). Лайбниц решава проблема на допирателните с помощта на диференциалното смятане. При това той излага правилата за диференциране на произведение, степен, неявна функция. Тези резултати той публикува едва през 1684 г. в статията “Нов метод за максимумите и минимумите”, където за първи път нарича своя алгоритъм “диференциално смятане”. През 1693 г. Лайбниц публикува първите примери за интегриране на диференциални уравнения с помощта на безкрайни редове. С неговото име в науката са свързани много открития и хипотези, които по-късно получават признание. В механиката на него принадлежи понятието за “живите сили”, в геологията - мисълта, че Земята има история. Изказва правилно предположение за произхода на изкопаемите останки от растения и животни, отстоявайки важната за биологията мисъл за еволюцията.

Лайбниц създава собствена научна школа, в която влизат братята Бернули, Г. Ф. Лопитал и др. математици. Той пръв нарушава вековната традиция да се пишат научните трудове само на латински език.

Към началото на 18 век славата на Лайбниц, може да се каже без преувеличение, се носи по цяла Европа. Нямало учен или монарх, които не биха сметнали за чест кореспонденцията или даже беседата с Лайбниц. Разностранността на неговите интереси е наистина поразителна.

Русия също отдавна интересува Лайбниц. Още през 1695 г. до него пристигат слухове, наистина смътни, за известния млад цар в далечна Московия. Лайбниц и Петър I се срещат за първи път през юли 1679 г. в Ханове. Реални последствия тази среща няма, ако не се смята, че Петър I, отличаващ се, както е известно, с голяма проницателност, високо оценява Лайбниц. Самият Лайбниц се изказва за Петър I като за забележителен държавен реформатор. През 18 век все още господства мисълта за "просветения монарх". Лайбниц вярва в този мит и затова внимателно следи какво прави Петър I в Русия. Те отново се виждат през 1711 и 1712 г. в Карлови Вари, Теплиц и Дрезден. Този път беседите довеждат до няколко документа, отнасящи се до реформирането на образованието в Русия. За тази цел Лайбниц предлага цяла иерархия от научни и учебни заведения. В негова записка се изброяват и накратко се описват учрежденията от първа необходимост: библиотека, музей, зоологическа градина, обсерватория и т.н. Ако се сравни записката на Лайбниц с първоначалния състав на АН в Русия, се вижда, че проектът на Лайбниц е положен в основата на организацията на ново научно учреждение. Петър I, както е известно, не доживява деня на откриването на Академията.

Последните години от живота на Лайбниц преминават в самота. Подаграта го приковава към креслото. Хановер престава да играе ролята на крупен политически и научен център, какъвто е в годините, когато Лайбниц е в разцвета на силите и творчеството си. Покровителите на философа умират, кореспонденцията постепенно угасва. Обстоятелствата около неговата смърт не са напълно ясни. На 17 ноември 1716 г. още от сутринта Лайбниц се чувства по-зле от обикновено. При него е езуит, който предлага "домашно средство", приготвено от него самия. Лайбниц изпива предложената смес и веднага усеща жестоки болки в стомаха. Докато търсят лекар, Лайбниц умира, примерно час след приемането на "лекарството". Зад ковчега на човека, бивша гордост на нацията, върви един-единствен съпровождач - неговият секретар.

От трите академии, на които той е член, - Берлинската, Парижката и Лондонското кралско дружество, само Парижката АН го почита с похвална дума. Тя е произнесена от Фонтенел на 13 ноември 1717 г.

Лиувил, Жозеф (J. Liouville) (24.03.1809-08.09.1882) - френски математик, професор (1833), член на Парижката АН (1839), чуждестранен почетен член на Петербургската АН. Роден е в Сент-Омер. Преподава в Политехническото училище и Колеж де Франс. През 1836 г. основава "Списание на чистата и приложна математика".

Научните интереси на Лиувил са много широки. Той построява теорията на елиптичните функции, които разглежда като двояко периодични функции на комплексна променлива. В общата теория на аналитичните функции на него принадлежи теоремата: "Всяка цяла функция, ограничена върху цялата равнина, е тъждествено равна на константа". Базирайки се на общата теория на аналитичните функции, Лиувил изследва граничната задача за линейните диференциални уравнения от втори ред. На него принадлежи фундаменталната теорема на статистическата механика, а също така теоремата за интегриране на каноничните уравнения в динамиката. В теорията на числата особено важни са резултатите от изследванията на Лиувил, отнасящи се до рационалните приближения на алгебричните числа. Той успява да установи, че числото e не може да бъде корен на уравнението $ax^2+bx+c=0$. През 1851 г. Лиувил доказва съществуването на трансцендентните числа и за първи път построява конкретни класове на трансцендентните числа. Той пръв оценява работите на Е. Галоа и ги публикува в своето списание.

Лопитал, де Гийом Франсоа Антоан (G. F. A de L' Hôpital) (1661-02.02.1704) – френски математик, член на Парижката АН. Роден е в Париж в богато и знатно семейство. За последното свидетелства фактът, че той е носил титлите маркиз и граф.

В неговите детски занимания математиката не е играла никаква роля. Известно е, че той е имал слаби успехи в латинския език - предмет, който по това време се е броял за един на най-важните. Истинското негово призвание се открива почти случайно, когато в ръцете му попада учебник по геометрия. Той случайно се е заинтересувал от чертежите и, както се казва, надникнал в книгата, за да разбере за какво служат тези чертежи.

Това негово първо запознанство с геометрията бързо прераства в истинска страст. На младия математик, кой знае защо, не му се отдава да намери добър учител и той изучава любимия предмет самостоятелно и, вероятно, достатъчно задълбочено. За това говори следната случка: когато е на 15 г., той случайно се оказва в общество, където става дума за Паскал и неговия необикновен талант. Сред общия хор от похвали, с които се съпровождал разказа за решението на Паскал на една задача (ставало дума за циклоидата), мълчи само Лопитал. Той казва само, че не вижда причини за удивление; на него му се струва, че и той би решил такава задача. Наистина след два дни той занася собственото си решение.

Според обичая на знатната аристокрация, всички мъже в семейството на Лопитал са военни. Служи като капитан в кавалерията и Гийом Франсоа. Обаче силното му късогледство става причина да изостави военната служба. Така получава възможността да се посвети на математиката. Има сведения, че през 1688 г. той започва да изучава работите на Лайбниц. Но успехите, изглежда, карат човек да желае повече. Във всеки случай към момента на запознанството му с младия Йохан I Бернули, Лопитал осъзнава, че не е повече от начинаещ ученик. Той моли новия си познат да му прочете курс от лекции. През лятото на 1692 г., в своето имение близо до Вандом, Лопитал в течение на четири месеца усилено се занимава под ръководството на Йохан Бернули. Занятията са успешни. През 1693 г. Лопитал вече свободно владее новата материя. Той си кореспондира с Лайбниц. Решава и задача, предложена от Бернули, разновидност на задачата на Дебон. През 1693 г. все още не е загубен интересът към задачи от този род, за което може да се съди макар и по това, че едновременно с Лопитал решения публикуват Якоб Бернули, Лайбниц, Хюйгенс. Това показва, че Лопитал не се бои да се захваща със сериозни задачи.

През 1693 г. той е избран за член на Парижката АН.

Лопитал също поставя интересна задача и през 1695 г. дава нейното решение. Задачата е такава: подемен мост е снабден с противотежест, която е съединена с моста с гъвкаво дебело въже. Трябва да се определи кривата, по която трябва да се движи противотежестта, че при преместването на моста тя да бъде във всеки момент в равновесие.

През 1696 г. Лопитал решава, наред с Нютон, Лайбниц и Якоб Бернули, знаменитата задача на Йохан Бернули за брахистрона или за кривата на най-бързото спускане.

През същата година излиза от печат и основното творение в живота на Лопитал - “Анализ”. Пълното заглавие на книгата е “Анализ на безкрайно малките за познаване на кривите линии”. Книгата има 10 глави, в това число: ”Принцип за изчисляване на диференциали”, “За допирателните”, “За максимумите и минимумите”, “За разкриване на неопределени изрази” и др. В книгата е включено и така нареченото правило на Лопитал - правилото за намиране на границата на дроб, числителят и знаменателят на която се стремят към нула.

Както е известно, в основата на своята книга Лопитал полага лекциите на Й. Бернули и това, което той е извлякъл от работите и писмата на Бернули и Лайбниц. За това той говори прямо и открито в предговора: “В заключение трябва да призная, че аз много съм задължен на господата Бернули, особено на най-младия от тях, който в настояще време е професор в Грьонинген. Аз без никакво стеснение се ползвах от техните открития и от откритията на г-н Лайбниц. Затова аз нямам нищо против това, те да предявят своите авторски права за всичко, което им е угодно, задоволявайки се само с това, което благоволят да ми оставят”. От посочените трима автори на анализа двамата са били напълно удовлетворени от това заявление на Лопитал и само Йохан се е почувствал обиден.

“Правилото на Лопитал” е първият пункт на “Анализа”, по който Й. Бернули започва обстрел. Наистина трябва да му се отдаде дължимото, той е имал търпението да почака, докато Лопитал почине. Но година след неговата смърт, през 1704 г., Й.Бернули публикува бележката “По повод на моя метод за определяне на стойността на дроб, числителят и знаменателят на която изчезват, публикуван в § 163 на “Анализ на безкрайно малките”. Записките на лекциите на Й. Бернули и неговите писма до Лопитал показват с голяма определеност, че по-голямата част на “Анализ” е съставена по данни, получени от Й. Бернули. Например Лопитал пише през 1692 г. на Й. Бернули, че не може да получи стойността на дробта $\dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ при $x = a$. Решението на примера е поместено в “Анализ” (§ 164), непосредствено след “правилото на Лопитал” (§ 163). Решението е намерено от Й. Бернули.

Когато Лопитал изпраща на Й. Бернули книгата, последният му отговаря с писмо, пълно с комплименти: “Вие много ясно обяснявате всичко; разположението и редът на теоремите са много удачни; въобще всичко е направено прекрасно и хиляди пъти по-добре, отколкото бих го направил аз”.

Книгата се ползва с голям успех, който се дължи, първо, на достойнствата, отбелязани от Й. Бернули, и, освен това, на лекотата на четене и на големия брой задачи, само част от които има старите решения (по метода на древните математици). "Анализ"-ът нееднократно се преиздава - през 1716, 1720, 1768 г.; през 1730 г. е издаден на английски език, има и латинско издание.

Вдъхновен от успеха на книгата, Лопитал има намерение да напише учебник по интегрално смятане. Когато той споделя своя замисъл с Лайбниц, последният съобщава на Лопитал, че пристъпва към написването на труд примерно със същото съдържание. Тогава Лопитал решава, че трябва да предостави поле на действие на Лайбниц. Но Лайбниц не реализира своето намерение и курсът по интегрално смятане за дълго се задържа без издаване. Едва през 1754-1756 г. Л. А. де Бугенвил (1729-1811) издава "Учебник по интегрално смятане", който в известен смисъл може да се разглежда като продължение на "Анализ"-а на Лопитал.

От работите на Лопитал трябва да се отбележи още статията през 1699 г., в която той дава решението на една задача на Нютон, но е публикуван само резултатът, без извеждането.

Последната значителна работа на Лопитал е "Аналитически трактат на коничните сечения" - изследване на кривите от втора степен.

През 1704 г., на 43 години, Лопитал умира от апоплектичен удар.

В края на 17 век Лопитал е забележителна фигура сред европейските математици. Разбира се никой не го сравнява напр. с братята Бернули, нито с творящите тогава Нютон и Лайбниц, но истинската слава за Лопитал е неговият "Анализ".

Лоран, Пиер Алфонс (P. A. Laurent) (1813-1854) - френски математик, по професия военен инженер. Лоран съществено допълва някои изследвания на О. Коши, давайки (1843) разлагането на функция, аналитична в кръгов венец, по цели положителни и отрицателни степени (ред на Лоран).

Лузин, Николай Николаевич (09.12.1883-28.02.1950) - руски математик, доктор на физико-математическите науки (1916), професор (1916), академик на АН на СССР (1929), член на Краковската АН, почетен член на математическото дружество в Калкута, на Белгийското математическо дружество в Брюксел.

Роден е в гр. Томск. Началното си образование получава в частно училище. После учи в Томската и Иркутската гимназии. През 1901 г.

Лузин постъпва в математическото отделение на физико- математическия факултет в Московския университет.

Николай Лузин

През 1905 г., студент в университета, той заминава за Париж, където в Сорбоната слуша лекциите на Е. Борел по теория на целите функции, на А. Поанкаре за разлагането в ред на пертурбационните функции в небесната механика, а също така на Ж. Адамар и Ж. Дарбу.

Връщайки се в Москва, успешно взема държавните изпити и е оставен в университета за подготовка за професорско звание. През есента на 1910 г. факултетът го командирова за 3 години в Гьотинген и Париж за изучаване на математическите науки. В Гьотинген Лузин работи върху теорията на тригонометричните редове. Тук той написва и публикува своята първа работа (1911). В Париж взема активно участие в семинара на Ж. Адамар, сближава се с такива учени като К. Е. Пикар, Е. Борел, А. Л. Лебег, А. Данжуа и др. Продължава своите изследвания в теорията на функциите на реална променлива.

Когато е отново в Москва (1914), Лузин започва да чете в университета факултативен курс по теория на функциите на реална променлива и да води специален изследователски семинар, полагайки основите на московската школа на теория на функциите. През 1915 г. Лузин завършва работата "Интеграл и тригонометричен ред", за която получава степен доктор на чистата математика (1916). От 1918 г. работи в Политехническия институт в гр. Иваново, а от 1922 г. - в Московския университет. След избирането му за академик ръководи отдела по теория на функциите на Математическия институт "В. А. Стеклов" на АН на СССР. Ученици на Лузин са М. Я. Суслин, М. А. Лаврентиев, Л. А. Люстерник, Н. К. Бари, А. Н. Колмогоров и др. През 1916-1920 г. Лузин, Суслин и П. С. Александров създават ново направление в математиката - дескриптивната теория на функциите. Важна работа на Лузин по теория на функциите е "Лекции за аналитичните множества и техните приложения" (1930), в която той обобщава своите изследвания и изследванията на своите ученици. През 30-те години Лузин, продължавайки да работи върху проблемите на дескриптивната геометрия на множествата и въпросите за обосновка на математиката, започва да работи и в областа на приложенията на класическия анализ и диференциалната геометрия.

Значително внимание Лузин отделя на създаването на вузовски учебници. Много популярен през 20-30-те години е учебникът по диференциално и интегрално смятане за техническите вузове на американския математик Гренвил под редакцията на Лузин. Този учебник се преиздава 17 пъти и с течение на времето става почти оригинална работа на Лузин. През 1940 г. Лузин написва курс по теория на функциите на реална променлива. В последните години от своя живот той се връща към изследванията по диференциална геометрия. Награден е с ордена "Трудово Червено Знаме".

Моавър, де Абрахам (A. de Moivre) (26.05.1667-27.11.1754) - английски математик, член на Лондонското кралско дружество (1697), чуждестранен член на Парижката и Берлинската АН. Роден е във Витри-ле-Франсоа (Франция). Учи се при известния френски математик Ж. Озанам. Живее много години в Лондон. Бил е в приятелски отношения с И. Нютон и Е. Галилей.

Моавър работи в областта на теорията на редовете, теория на вероятностите, комплексните числа. В теория на вероятностите той доказва важна теорема, наречена с неговото име. Тя може да се намери във всички учебници по тази теория. В теорията на комплексните числа въвежда правилата за вдигане на степен и извличане на n-ти корен от комплексни числа. Тези формули широко се използват в тригонометрията и алгебрата при решаването на двучленни уравнения и са известни сега като формулите на Моавър.

Непер, Джон (J. Napier) (1550-04.04.1617) - шотландски математик. Роден е в Мерчистон-Касъл близо до Единбург (Шотландия).

Джон Непер

Учи в колеж, а от 16-годишна възраст пътешества по Европа, попълвайки своите знания. Връщайки се в родината, Непер служи в армията и се занимава с научна работа. Неговите математически работи са насочени към опростяване и подреждане на аритметиката, алгебрата и тригонометрията. Широко известни са неперовите аналогии и неперовото правило на кръговите части за решаването на правоъгълни сферични триъгълници. В работата "Описание на таблиците на логаритмите" (1614) Непер излага свойствата на логаритмите, дава описание на таблиците, правила за ползването им и примери за приложенията им. Съставяйки тези таблици, изхожда от сравняването на аритметична и геометрична прогресия, при което членовете на аритметичната прогресия нарича логаритми, на които в геометричната прогресия съответстват определени числа. Таблиците на Непер са предназначени за намирането на логаритми на тригонометрични величини, но те могат да се използват и за намирането на логаритми от естествени числа.

Нютон, Исак (I. Newton) (04.01.1643-31.03.1727) - английски физик, механик, астроном и математик, член на Лондонското кралско дружество (1672) и негов президент (1703), чуждестранен член на Парижката АН (1699). Роден е в село Вулсторп близо до неголемия град Грентем. Бъдещият велик физик и математик се ражда хилаво бебе. При раждането си е имал такъв невзрачен вид, че околните мислели, че той ще издържи само няколко часа. Двете жени, изпратени в града за лекарства, не бързали да се върнат, предполагайки, че докато пристигнат обратно, новороденото няма вече да е живо. Какво било тяхното учудване, когато, връщайки се, те видели детето живо и издаващо внушителни викове!

Исак Нютон

Бащата на Нютон умира още преди раждането на детето и цялата грижа за него пада на майка му. Недоспивайки си нощем, тя мисли за това, как да спаси сина си от гибел и да подобри здравето му.

Майката решава, че чистият селски въздух и добрата храна трябва да подействат на неговото здраве като живителен балсам. Тя притежавала неголяма ферма и мечтаела да направи от своя син фермер, тъй като по нейно мнение, той не ставал за друга професия поради лошото си здраве.

Действително, както и предполагала майка му, селският въздух, селските игри и забавления благотворно повлияли за укрепването на организма на Нютон. Така в детството си той получава добра физическа закалка.

Избързвайки напред, трябва да се каже, че Нютон е живял до дълбока старост (умира на 85 години). Той не е ползвал очила и през целия си живот не е изгубил и един зъб. Почива от така наречената каменна болест, признаците на която открива три седмици преди смъртта си.

Майката, възпитавайки своето дете, мислила повече за неговото физическо здраве, отколкото за умственото му развитие. На 12-годишна възраст тя го дава в частния пансион на Кларк - грентемски аптекар. Нютон не изпитва особена любов към науките и се учи доста посредствено. Прелом в учението към по-добро става в края на двугодишното му пребиваване в пансиона. За това помогнала следната любопитна случка: веднъж в междучасието един от учениците ударил Нютон по корема. Ударът бил толкова силен, че Нютон едва не загубил съзнание. Остра болка пронизала цялото му тяло. За миг престанал да вижда. Обливайки се в пот, той някак си преодолял страшната болка.

Побойникът не на шега се изплашил. Но виждайки, че Нютон след известно време се оправил, открито тържествувал с победата и се присмивал на пострадалия. Как му се искало на Нютон да отмъсти на оскърбителя в тази минута! Но това той не можел да направи, тъй като бил значително по-слаб от противника си.

Дълго мислил обиденият Нютон и накрая намерил твърде оригинален начин за отмъщение. Неговият неприятел превъзхождал Нютон не само физически, но и бил пръв ученик в класа. И заради мъст Нютон решава веднага да започне да се учи добре, да изпревари своя съперник в учението и, ставайки първенец в класа, завинаги да му отнеме палмата на първенството.

Своя план Нютон изпълнява от добре по-добре. Оказало се, че той притежава изключителни способности. Без особен труд става първенец в класа и по умственото си развитие се оказва с цяла глава по-високо от всички свои другари. По-нататък вече никой не можел да се състезава с него по успех. Учителят вече на всеослушание хвалел младия Нютон като образцов ученик, от когото всички трябва да вземат пример.

Петнадесетата и шестнадесетата си година Нютон прекарва при майка си във фермата. Но майка му не успява да развие у сина си вкус към работата в селското стопанство. Негова страст било четенето на книги. А когато не четял, той обичал да майстори нещо. Един път направил воден часовник, друг път конструирал оригинална вятърна мелница, в която била сложена мишка, изпълняваща ролята на мелничаря.

Веднъж през нощта Нютон пуснал хвърчило, направено собственоръчно, снабдено със светещи фенери. Жителите на съседното село се чудели какво е това и решили, че сигурно е комета.

Майката, разбира се, не можела да не забележи безразличието на Нютон към фермата и увлечението му по книгите. Веднъж той така се увлякъл в четенето, че не усетил кога зад него се е приближил чичо му, който се заинтересувал от какво така силно е увлечен неговият племенник. Вземайки книгата, той с учудване видял, че изучава трактат по механика и от него решава някаква заплетена задача. И това на 16 години!…

Откривайки у младежа талант към науката, чичото незабавно се обръща към майка му с молбата да изпрати младия Нютон отново в грентемското училище, за да го завърши и да може да постъпи в университет.

На 17 години Нютон започва следването си в Кембриджския университет (1661-1665). Тук той със страст изучава съчиненията на древните учени, в частност "Начала́"- та на Евклид. След това преминава към изучаването на изследванията на големите учени на новото време. Вниманието му е привлечено от геометрията на Декарт, аритметиката на Валис (Уолис) и математическите съчинения на Кеплер. Четенето на тези трактати при него не било механично. Той ги усвоявал критично, дълбоко осмислял прочитаното и, като правило, противопоставял своята гледна точка, а незавършените мисли на автора довеждал до "логичен край".

Още в студентските си години Нютон се показва като любознателен, упорит и настойчив изследовател. Така, като студент, той доказва теоремата за бинома. (Той доказва тази теорема не само за естествен, но и за дробен и отрицателен показател). Оттогава формулата на бинома започва да се нарича "бином на Нютон". Като студент Нютон плътно се приближава до проблема за всемирното привличане. По-късно на този проблем той посвещава цял трактат - "Математически начала на естествената философия". Този капитален труд прославя автора в целия свят и го прави "най-велик сред великите" учени.

Избухналата по това време епидемия от чума заставя Нютон, както и много други граждани на Англия, да бяга на село. Нютон остава във Вулсторп, докато върлува страшното бедствие. Смята се, че през 1665 г. само в Лондон от чума умират 100 хиляди души. ("Пир по време на чума" на А. С. Пушкин се отнася именно за епидемията от 1665 г.). "Чумният" отпуск на Нютон продължава до март 1667 г.

Двете години, прекарани от него във Вулсторп, са изпълнени с интензивна научна работа. За това кратко време Нютон разработва метода на флуксиите, провежда важни опити по оптика и установява изходните положения на теорията на всемирното привличане. Сравнително неотдавна в книжата на учения намират следната записка: "В онази година аз започнах да мисля за привличането, простиращо се до Луната… Всичко това ставаше през двете чумни години 1665 и 1666, тъй като в това време аз бях в разцвета на своите изобретателски сили и мислех за математиката и философията повече, отколкото когато и да било по-късно”.

От 1669 до 1701 г. Нютон работи в Кембриджския университет. През 1695 г. е назначен за надзирател, а от 1699 г. - за главен директор на Монетния двор в Лондон. През 1668 г. той получава степен магистър, а през следващата година неговият учител И. Бароу му отстъпва своята катедра в Кембриджския университет. В тази катедра Нютон работи до 1701 г.

Научните интереси на Нютон се формират още през 1661-1669 г. Годините на работа в университета са за него най-плодотворните. Именно по онова време той написва своите най-важни трудове. Работейки като надзирател в Монетния двор, Нютон се занимава основно с въвеждането на ред в английското монетно дело и с подготовката за публикуване на своите работи от предишните години. За съжаление значителна част от тези работи е унищожена при един пожар.

През 17 век пред естествознанието възниква проблемът – да се намерят законите на движение и да се установят законите на механиката. За това апаратът на математиката на постоянните величини бил недостатъчен. Заслугата на Нютон се заключава в това, че едновременно с Г. Лайбниц, но независимо от него, той създава диференциалното и интегрално смятане, които стават могъщо средство за решаването на нови задачи. Концепциите на Нютон и Лайбниц са различни. Лайбниц, развивайки чистия анализ, изхожда от абстрактната концепция, която става изходна за развитието му; Нютон, пък, разглежда математиката, или, както тогава казват, геометрията, само като метод за физични изследвания. Тази връзка на математическите и физичните изследвания се проявява в метода на флуксиите на Нютон. Още през 1665-1666 г. той разработва за нуждите на механиката основните идеи на този метод, изхождайки предимно от работите на Б. Кавалиери, Ж. Робервил, П. Ферма, Д. Валис (Уолис) и на своя учител И. Бароу. По това време прави и своето откритие за взаимно обратния характер на операциите диференциране и интегриране, а също така прави и фундаментални открития в областта на безкрайните редове, в частност, индуктивното обобщение на така наречената теорема за бинома на Нютон в случая на произволен реален показател. Още в първата работа по анализ (“Анализ с помощта на уравнения с безкраен брой членове”, написана през 1669 г., а публикувана едва през 1711 г.) ученият дава метод за изчисляване и изучаване на функции – метод на апроксимация на функциите с безкрайни редове, който метод после има огромно значение за целия анализ. На тази основа Нютон с почленно интегриране получава редовете за $y = \ln(1 + x)$ и

$y = \arcsin x$, използвайки обръщането на редовете, т.е. замествайки x с y, намира разложението в ред на показателната функция, на синуса, косинуса и т.н.

През 1670-1671 г. Нютон излага своето диференциално и интегрално смятане в съчинението "Метод на флуксиите" (публикувано през 1736 г.). В него ясно са формулирани в механически и математически изрази двете взаимно обратни задачи на анализа и приложението на метода на флуксиите към голям брой геометрични задачи (задачи за допирателни, кривина, екстремуми, квадратури, ректификации и т.н.), а също така са представени с елементарни функции редица интеграли от функции, които съдържат квадратен корен от квадратен тричлен. Голямо внимание е отделено на интегрирането на обикновени диференциални уравнения, решени са някои задачи на вариационното смятане.

Приносът на Нютон в математиката не се изчерпва със създаването на диференциалното и интегрално смятане. В алгебрата на него се дължи методът за числено решаване на алгебрични уравнения (метод на Нютон), важни теореми за симетричните функции от корените на алгебричните уравнения, за отделянето на корените и т.н. Алгебрата при Нютон има геометрична форма. Неговата дефиниция на числото не като съвкупност от единици, а като отношение на дължината на произволна отсечка към отсечка, приета за единица, изиграва важна роля в развитието на учението за числата.

В "Метод на разликите" (1711) Нютон решава задачата за прекарването през $n+1$ дадени точки с равноотдалечени или не равноотдалечени абсциси параболична крива от n-ти ред и предлага интерполационна формула, наречена с неговото име.

"Математическите начала на естествената философия" (1687) на Нютон съдържа развита теория на коничните сечения, необходима за изследването на движението на планети и комети. В "Преброяване на кривите от трета степен" (1704) Нютон дава класификацията на тези криви, обобщава понятието диаметър и център, показва методи за построяване на криви от втора и трета степен по различни условия. Тази работа изиграва важна роля в развитието на аналитичната и частично на проективната геометрия.

Постиженията на Нютон в механиката са подготвени от работите на Г. Галилей, Х. Хюйгенс и др. учени. В споменатата по-горе работа "Математически начала на естествената философия" той свежда всички известни преди него и всички намерени от самия него сведения за движението и силата в една дедуктивна система. Установявайки няколко основни закона на механиката (закон за инерцията, закон за независимото действие на силите, закон за равенството на действието и противодействието), Нютон извежда от тях всички други теореми на механиката. Той открива закона за всемирното привличане, посочва онази обща сила, която е първопричина за такива разнообразни явления като падането на телата, въртенето на Луната около Земята и на планетите около Слънцето, движението на кометите, приливите и отливите и т.н.

Освен това Нютон изследва и движението на тела в среда, оказваща съпротивление. На него принадлежат фундаментални открития в оптиката, в частност, той изяснява причината за разсейването на светлината, показва, че бялата светлина се разпада на цветовете на дъгата вследствие на различното пречупване на лъчите на различните цветове при преминаването им през призма, и полага основите на правилната теория на цветовете. Тези изследвания го довеждат до изобретяването на огледалния телескоп (1688). Нютон изследва също и интерференцията на светлината. Независимо от това, че неговите опити потвърждават вълновата теория на светлината, той решително се изказва против нея и отстоява хипотезата за изтичането, съгласно която източникът на светлина изхвърля съвсем малки материални частици - корпускули. Тази теория известно време е напълно отричана, но сега отново се възражда в променен вид.

Независимо от огромните му заслуги в науката, Нютон бил удивително скромен човек. За себе си той говори така: “Не знам какъв изглеждам на хората. На самия себе си изглеждам като дете, което играе на брега на морето и се радва, когато успее да намери гладко камъче или красива мида с не съвсем обикновен вид, докато в същото време необозримият океан лежи пред мене неизследван”.

По описанието на съвременниците си Нютон бил мъж среден на ръст, с твърде солидна пълнота. Според традициите на онова време, слагал на главата си перука. Имал умни, живи очи.

Нютон водел уединен начин на живот. Потънал в дълбоки размишления, често не забелязвал заобикалящите го и бил твърде разсеян. Увлечен в работата си, съвършено забравял за яденето.

Ето как един от биографите на Нютон описва такъв случай на разсеяност, който звучи като анекдот. Един път при Нютон дошъл близък приятел с доброто намерение да обядват заедно. В последната минута, когато печената кокошка била сервирана на масата, Нютон се затворил в своя кабинет и се забавил там, увлечен в поредната работа, забравяйки за приятеля си и за предстоящия обяд. Изчаквайки Нютон достатъчно дълго и съвършено напразно, приятелят се справил с кокошката сам, а оглозганите кости сложил в чинията и я покрил със сребърен капак. Скоро след това се появил и самият Нютон и високо обявил, че е много гладен. Но, сядайки на масата и намирайки в чинията само оглозганите кокали, с учудване, без да подозира нищо, възкликнал: “Интересно, оказва се, че аз вече съм се наобядвал. Ето как може човек да сгреши!”

През целия си живот Нютон остава ерген. Биографите му предполагат, че не е имал време дори и да помисли за женитба.

Интензивната научна работа на Нютон е през първите 45 години от неговия живот. През останалите 40 години се наблюдава значителен спад на творческата му дейност. През този период Нютон основно се занимава с издаването на по-рано написаните трудове (през 1704 г. излиза “Оптика”, през 1713 г.- второто издание на “Началата”). Това е много странно за един гениален човек. В онази възраст, в която Нютон престава да твори, се предполага, че неговият ум би трябвало да достигне пълна зрялост и сила. Знаменитият френски учен Жан Батист Био, направил много за изучаването на трудовете на Нютон, предполага, че умствените способности на Нютон са пострадали от следния нещастен случай: една вечер Нютон излязъл от дома си и от разсеяност оставил на писалището си запалена свещ. По време на неговото отсъствие любимото му куче на име Даймонд скочило на масата и съборило свещта. Всички ръкописи, лежащи на масата, изгорели. Лесно е да си представим колко голяма е била мъката на Нютон, когато, връщайки се вкъщи, намира от своите дългогодишни трудове само пепел.

Астрономическите открития на Нютон нанасят съкрушителен удар по авторитета на църквата и показват пълната несъстоятелност на църковните догми. Против тези открития богословите от всички цветове разгръщат яростна борба. И те временно постигат своето. Под тяхното въздействие в много университети в Европа чак до 19 век е забранено преподаването на небесната механика на Нютон и неговия хелиоцентризъм на основата на закона за всемирното привличане. Но самият Нютон не бил атеист.

Още докато е жив Нютон опитва от сладостта на най-великата слава. След смъртта на Вилхелм III на трона се възкачва Анна Стюарт. През 1705 г. тя посещава Кембриджския университет. По този повод Нютон пристига в Кембридж. Кралица Анна го произвежда в рицар и дворянин. Нютон става “сър Нютон”. Той е първият учен получил титлата “сър” за научни заслуги. Целият свят се прекланя пред неговия гений!

Нютон е погребан в английския национален пантеон във Уестминстерското абатство - място, на което почиват всички велики хора в Англия. При погребението му са оказани почести, които обикновено се отдават само на членовете на кралския двор.

Ойлер, Леонард (L.Euler) (15.04.1707-18.09.1783) - швейцарски математик, физик, механик и астроном. Роден е в Базел, Швейцария. Син е на калвиниския пастор Паул Ойлер.

Леонард Ойлер

Първи учител на Леонард е неговият баща, който, естествено, смятал, че синът му трябва да стане пастор. Макар младият Ойлер да показва своя феноменален математически талант, баща му бил решил твърдо, че той трябва да учи теология и да прави църковна кариера. Но независимо от това наред с елементарните сведения от общото образование, Паул Ойлер занимавал сина си и с математика. Самият той бил любител математик, който имал щастието да се учи при самия Якоб Бернули. Когато Леонард пораства, го записва в гимназия. В гимназиите по онова време, където не били редки случаите, в които учителите зверски пребивали учениците, а възмутените бащи си го връщали на учителя пред целия клас, едва ли можело да се изучи математика. Ако някой ученик искал да се научи на нещо, той вземал частни уроци, обикновено от студентите в местния университет. Така постъпва и Ойлер.

На 20 октомври 1720 г. Ойлер се записва във философския факултет на Базелския университет. Постъпвайки в университета, той смятал послушно да изпълни волята на баща си и да се подготви за професията на пастор. Затова трябвало да завърши философския факултет, който давал обща подготовка, а след това богословска.

За щастие на Ойлер, Базел бил родният град на знаменития клан Бернули. Бернулиевци могат с основание да претендират за най-математическото от всички семейства, създало осем от най-видните умове на Европа само за три поколения - някои казват, че фамилията Бернули за математиката е онова, което е фамилията Бах за музиката. Славата им се простира далеч извън математическата общност и една специална легенда е типична за профила на това семейство. Данаил Бернули веднъж пътувал из Европа и се разговорил с един непознат. Още в началото той се представил скромно: “Аз съм Данаил Бернули”. “А аз - казал спътникът му саркастично,- аз съм Исак Нютон”. Данаил си спомнял с удоволствие тази случка по различни поводи, смятайки я за най-искреното признание, което някога е получавал.

Данаил и Николай Бернули били близки приятели на Леонард Ойлер и разбирали, че най-блестящият математик е превърнат в най-посредствен теолог. Те се обръщат с молба към Паул Ойлер да му позволи да захвърли расото в полза на числата. Старият Ойлер, обучаван в миналото по математика от стария Бернули - Якоб, се отнасял с голямо уважение към това семейство. С нежелание той се съгласява, че синът му е роден да смята, а не да проповядва.

Притежавайки великолепни способности и феноменална памет, Ойлер имал много свободно време. Той започва да посещава лекциите на Йохан I Бернули. На лекциите той се запознава и сдружава със сина на професора Йохан II. Йохан I Бернули скоро обръща внимание на юношата, оценява неговите необикновени способности, съветва го да изучава първоизточниците и всяка събота да отива при него вкъщи за допълнителна беседа по прочетеното през седмицата. Ойлер впоследствие си спомня за тези беседи с топло чувство и отбелязва, че му било нужно да полага не малко труд, за да доведе до минимум неясните за него места от прочетеното през седмицата. Бидейки често в дома на Бернули, Ойлер се запознава с по-големите синове на професора - Николай II и Данаил. Между Ойлер и братята Бернули се установява светла и здрава дружба за цял живот. Тази дружба изиграва важна роля за съдбата на Ойлер.

Занятията в университета вървели добре. След две години на 9 юни 1722 г. на Ойлер е присъдено званието бакалавър на науките. Петнадесетгодишен той завършва философския факултет.

Въпреки че младият Ойлер показва своя феноменален математически талант, баща му продължавал да настоява той да учи теология и да прави църковна кариера. Леонард послушно се съгласява да следва теология и иврит в Базелския университет.

На 23 октомври 1723 г. Ойлер се записва в богословския факултет. Освен богословски науки той изучава и древните езици (гръцки, латински, еврейски). До дълбока старост той запазва любовта си към класическата литература.

На 8 юли 1724 г. Ойлер произнася на латински език реч, в която прави сравнителен анализ на философията на Нютон и Декарт. За тази реч му е присъдена научната степен магистър на изкуствата.

През 1725 г. братята Николай и Данаил Бернули се отправят за Петербург, където пристигат през ноември. Между приятелите се установява кореспонденция. Бернули, преди отпътуването си от Швейцария, обещават на Ойлер да уредят и него, ако в Руската АН се освободи подходяща длъжност. Междувременно, завършил през 1726 г. Базелския университет, Ойлер не чака в бездействие вести от Петербург.

По времето когато умира Нютон, през 1727 г., в Европа се извършва научна революция. През същата тази година младият Ойлер публикува своята първа статия. Макар и да съдържа елегантна и оригинална математика, статията цели предимно да опише решението на техническа задача, свързана с мачтите на корабите.

Големите европейски държави не се интересували от използването на математиката за изследване на езотерични и абстрактни понятия, а желаели да я експлоатират за решаването на практически задачи и се състезавали да наемат най-добрите умове.

В хода на кариерата си Ойлер решава огромен брой задачи, вариращи от навигацията до финансите и от акустиката до иригацията. Практическата ориентация на Ойлер към решаването на задачи ни най-малко не повлиява на неговите математически способности. Напротив, решаването на всяка нова задача го вдъхновява да създава оригинална и остроумна математика. Неговата целеустремена страст го подтиква да пише по няколко статии в един ден и казват, че между първото и второто повикване за вечеря той успявал да скицира едно пълно пресмятане, заслужаващо публикация. Той не губел нито миг и, когато друсал бебе в едната си ръка, скицирал доказателство с другата.

Ойлер притежавал такава невероятна интуиция и силна памет, че за него се говорело, че можел да извърши наум цялата последователност от стъпки по едно пресмятане, без да ползва молив и хартия. В цяла Европа го характеризират като “въплъщение на анализа”, а френският академик Франсоа Араго казва, че “Ойлер смята без видимо усилие, тъй както хората дишат или орлите устояват на вятъра”.

Едно от най-големите постижения на Ойлер е разработването на алгоритмичния метод. Целта на Ойлеровите алгоритми е да решават привидно невъзможни задачи. Една такава задача е предсказването на фазите на Луната в далечно бъдеще с голяма точност - информация, която би могла да се използва за създаването на жизненоважни навигационни таблици. Нютон вече бил показал, че е сравнително лесно да се предскаже орбитата на едно тяло около друго, но в случая на Луната положението не било толкова просто. Луната се върти около Земята, но има и трето тяло - Слънцето, което извънредно усложнява нещата. Докато Земята и Луната се привличат взаимно, Слънцето смущава положението на Земята и има подтикващ ефект върху орбитата на Луната. За намиране на ефекта на всеки две от телата могат да се използват уравнения, но математиците на 18 век не можели да включат в пресмятанията си и трето тяло. Дори и днес не е възможно да се предскаже точното решение на така наречената "задача за трите тела".

Ойлер разбирал, че моряците нямат нужда да знаят фазите на Луната с абсолютна точност, а само с достатъчно приближение, за да локализират собственото си положение с точност до няколко морски мили. Поради тази причина той разработва предписание за получаване на несъвършено, но достатъчно точно решение. Това предписание, известно като алгоритъм, функционирало, като първо се получавал грубо приближен резултат, който можел пак да се вкара в алгоритъма и да се получи по-точен резултат и т.н. Със сто или около сто итерации Ойлер можел да предскаже положението на Луната, което да е достатъчно точно за целите на корабоплаването. Той предлага своя алгоритъм на Британското адмиралтейство и получава за награда от него 300 лири.

Избързахме малко напред и ето защо ще се върнем отново през септември 1726 г., когато Данаил Бернули, изпълнявайки обещанието си, дадено на Ойлер преди заминаването си в Русия, му съобщава, че му е дадено място в Петербургската АН. По съвета на Данаил, Ойлер постъпва в медицинския факултет, за да се подготви за занятията си по физиология в Петербург. Обаче скоро ги прекъсва и на 5 април 1727 г. заминава за Петербург. На 24 май е вече в Петербург, където топло го посрещат неговите сънародници - академиците Данаил и Николай Бернули.

В деня на пристигането му умира Екатерина I. За цар е провъзгласено момчето Петър II. Положението на АН става твърде неопределено. Този факт се отразява и на Ойлер. Не виждайки възможност да затвърди положението си в Академията, той се отнася с внимание към предложението на адмирал Сиверс, който помнел неговата известна работа по теория на кораба, и му предлага длъжност лейтенант от флота. Междувременно Петър II почива (в началото на 1730 г.) и на престола се оказва Анна Йоановна. В управлението на страната, както е известно, тя не изиграва никаква роля, но в положението на Академията се забелязва обрат към по-добро. Предлагат на Ойлер овакантилото се място в катедрата по физика и той се връща в Академията.

През 1733 г. Данаил Бернули заминава от Петербург в Швейцария и Ойлер преминава в катедрата по математика, където остава до заминаването си в Германия (1741).

През декември 1733 г. Ойлер се оженва и, както се казва, Бог благославя неговия брак - той има 13 деца, но порастват само 5.

През 1773 г., след 40 години щастлив брак, Ойлер овдовява. Цялото негово потомство, повече от 30 човека, живее с родоначалника.

Огромното семейство се нуждае от домакиня. И през 1776 г. Ойлер се жени за доведената сестра на своята първа жена.

Да се върнем отново към по-младите години на Ойлер. През 1733 г. той вече има не по-малко от 36 работи (от тях отпечатани само 11). В тези години Ойлер работи над своята "Механика".

През 1735 г. го сполетява нещастие - той почва да губи зрението си. Дълго време се смята, че загубата на зрението е в следствие на пренапрежение. Парижката академия предлага награда за решаването на една астрономична задача. Задачата била толкова трудоемка, че математическата общност помолила академията за отсрочка от няколко месеца, през които да се получи отговорът, но за Ойлер това не било необходимо. Той се отдава изцяло на тази задача, работи непрекъснато три дни и заслужено получава наградата. Лошите работни условия, обаче, съчетани със силното напрежение, причиняват на Ойлер (който няма още 30 години) загубата на зрението на дясното око. Това личи на много от портретите му. Смята се, обаче, че не работата по задачата е причината, тъй като, пристъпвайки към изчисленията, Ойлер извежда предварително нови формули, които извънредно много опростяват сметките и трябва да работи по 8 ч. на ден, за да завърши работата за 3 дни.

Ойлер обаче продължава да работи по старому. Загубата на едното око било дребно препятствие - фактически Ойлер твърди: "Сега ще се отвличам по-малко". През 1734-1741 г. той прибавя към предишните 36 работи още 75, от които тогава са отпечатани 46, в това число 37 в "Коментарии на Петербургската АН".

През 1740 г. умира императрица Анна Йоанновна и тронът преминава към младенеца Иван VI (род.1740 г.). Придворните интриги избухват с нова сила. На 16.12.1741 г. на престола се изкачва Елизавета Петровна. Положението на Академията отново се разклаща. Ойлер, преживял вече подобна ситуация в началото на 30-те години, решава да замине.

Славата на Ойлер вече се носи по цяла Европа. Той приема предложението на крал Фридрих II (Велики) и през 1741 г. се премества в Берлин. Работейки в Берлинската АН, не прекъсва обаче връзката си с Петербург. През 1746 г. излизат 3 тома статии на Ойлер, посветени на артилерията, в които той усъвършенства формулите на балистиката и им придава вид, удобен за практическо използване.

В продължение на целия си живот Ойлер отделя голямо внимание на въпросите на навигацията. През 1749 г. той издава двутомен труд, излагащ за първи път въпросите на навигацията в математическа форма. Въпросите за устойчивостта и равновесието на плавателните съдове, за люлеенето, за формата на съдовете, за движението им под действието на силите на вятъра и управлението на съда - всичко това се обхваща в това произведение. Работата е публикувана в Петербургската АН. Ойлер я допълва със серия от мемоари. Един от тях, мемоар за бордовото и киловото люлеене на съда, получава премията на Парижката АН през 1759 г. През 1773 г. Ойлер публикува пълната теория за корабостроенето и маневрирането на плавателните съдове. Този труд е издаден във Франция, Англия и Италия.

Многобройните открития на Ойлер по математически анализ, направени от него в продължение на 30 години и отпечатани в различни академични издания, по-късно са обединени в едно произведение - "Въведение в анализа на безкрайно малките" (Лозана, 1748). Първият том е посветен на свойствата на рационалните и трансцендентни функции, във втория том се изследват кривите от втора, трета и четвърта степени и повърхнините от втора степен. Тук за първи път са въведени ъглите на Ойлер, играещи важна роля в математиката и механиката. След "Въведението" излиза трактат в 4-и тома. Първият том, посветен на диференциалното смятане, е издаден в Берлин (1755), а останалите томове, посветени на интегралното смятане, - в Петербургската АН (1768-1770). В последния том на интегралното смятане се разглежда вариационното смятане, създадено от Ойлер и Ж. Лагранж. Ойлер изследва едновременно, както въпроса за преминаването на светлината през различни среди, така и свързания с това ефект на хроматизма. През 1747 г. той предлага сложен обектив.

В течение на четвърт век Ойлер е украшението и славата на Берлинската академия и носи върху себе си цялото бреме на ръководството ѝ, изпълнявайки освен това по най-добросъвестен начин всички поръчения на крал Фридрих II, колкото и нищожни да са те. Независимо от това Фридрих Велики си позволявал нетактичност след нетактичност. Отношенията им започнали да се развалят. По това време на престола в Русия вече стои Екатерина II (Велика), която поръчва на руския посланик в Берлин да върне Ойлер в Петербург. Ойлер се съгласява, като поставя някои условия от материален и личен характер, които били веднага приети. Възниква обаче неочаквано препятствие - кралят не желае да пусне Ойлер. Но и това препятствие е преодоляно.

Ойлер се връща в Русия. Той вече си е спечелил славата на човек, способен да реши всяка поставена му задача - талант, който изглежда се е простирал дори извън света на науката. По време на уроците, които давал в двора на Екатерина Велика, той среща големия френски философ Дени Дидро. Дидро бил заклет атеист и прекарвал дните си, опитвайки се да привлича руснаци към атеизма. Това вбесява Екатерина II, която моли Ойлер да спре усилията на безбожния французин.

Ойлер обмисля предложението и започва да твърди, че притежава алгебрично доказателство за съществуването на Бог. Екатерина Велика кани Ойлер и Дидро в двореца и събира своите придворни да слушат теологичния дебат. Ойлер застава пред аудиторията и провъзгласява: “Господине, $\frac{a+b^n}{n} = x$ и следователно Бог съществува. Опровергайте!”

Като човек, който не разбирал много от алгебра, Дидро не могъл да възрази на най-големия математик в Европа и останал безмълвен. Унизен, той напуска Санкт-Петербург и се връща в Париж. В негово отсъствие Ойлер продължил да се забавлява със своето завръщане към теологичните изследвания и публикува няколко други забавни доказателства за естеството на Бога и човешкия дух.

Ойлер се занимава и с Последната теорема на Ферма, която гласи, че уравнението $x^n + y^n = z^n$, където n е естествено число, по-голямо от 2, няма решения в цели положителни числа. Той използва метода на безкрайното спускане на Ферма, който метод Ферма съвсем кратко е скицирал на полето на своя екземпляр “Аритметика” за случая $n = 4$. Така Ойлер доказва теоремата за случая $n = 3$.

Това е огромно постижение, което обаче не могъл да повтори за други случаи на Последната теорема на Ферма. За съжаление всички усилия на Ойлер да разшири доказателството до безкрайност завършват с неуспех. Човекът, който създава повече математика от всеки друг в историята, отстъпва пред предизвикателството на Ферма. Единственото му утешение е, че е направил първия пробив в най-трудната задача на света.

Без да се обезкуражава от неуспеха си, Ойлер продължава да създава математика до деня на смъртта си, постижение, което е толкова по-забележително, като се знае, че през последните дни на живота си той е напълно сляп.

По съвета на Жан Лерон Даламбер, Ойлер е заместен от Жозеф Луи Лагранж като математик в двора на Фридрих Велики по времето, когато Ойлер пак е в Германия. Той се връща в Русия, където Екатерина Велика отново топло посреща своя “математически циклоп”.

На шестдесетгодишна възраст състоянието на Ойлер се влошава чувствително, защото катарактът в здравото му око подсказва, че му е съдено да ослепее напълно. Той е решен да не се предава и започва да се упражнява да пише със затворено гаснещо око, за да усъвършенства техниката си на писане, преди да потъне в пълен мрак. След няколко седмици той ослепява. Репетициите помогнали за известно време, но после почеркът на Ойлер станал нечетлив и неговият син Алберт започнал да му помага като секретар.

Ойлер продължава да произвежда математика през следващите 17 години и, ако не друго, е по-продуктивен от когато и да е. Неговият необикновен ум му позволява да борави с понятия, без да ги записва на хартия, а феноменалната памет му дава възможност да използва собствения си мозък като библиотека. Негови колеги изказват предположението, че под напора на слепотата хоризонтът на неговото въображение, изглежда, се е разширил. Достойно за отбелязване е, че пресмятанията на Ойлер за положението на Луната са завършени през периода на неговата слепота. За империите в Европа това е най-ценното математическо постижение - задача, която не се е поддала на най-големите математици на Европа, включително и на Нютон.

През 1776 г. е направена операция на Ойлер за отстраняване на катаракта и за няколко дни изглеждало, че той е възстановил зрението си. След това настъпва инфекция и Ойлер отново потъва в мрак. Но той не губи кураж и продължава да работи, докато на 18 септември 1783 г. не получава фаталния мозъчен удар.

Ойлер оставя богато математическо наследство. Работата си "Елементи на алгебрата", излязла през 1768 г., Ойлер е принуден да диктува, тъй като по това време вече е напълно сляп. Работата излиза на руски, немски и френски езици. Заедно с академик В. Крафт, Ойлер събира в един огромен трактат всичко, което е написал в продължение на 30 години по диоптрика. През 1769-1777 г. излизат 3 големи тома, в които са изложени правилата за най-доброто изчисляване на рефрактори, рефлектори и микроскопи; решават се такива въпроси като изчисляването на най-голямата яркост на изображението, най-голямото поле на зрението, най-малката дължина на астрономичните тръби, най-голямото увеличение и т.н. В същото време се печатат 3 тома от писмата на Ойлер до немската принцеса, 3 тома на интегралното смятане, 2 тома на елементите на алгебрата, мемоарите: "Изчисляване на Кометата 1769", "Изчисляване на затъмнението на Слънцето", "Нова теория на Луната", "Навигация" и др.

През 1775 г. Парижката АН, заобикаляйки статута и със съгласието на френското правителство, определя Ойлер за свой 9-ти "присъединен член" (а по статут можело да бъдат само 8). Независимо от слепотата на Ойлер, научната му продуктивност расте. Почти половината от неговите трудове е създадена в последното десетилетие от живота му.

Той се занимава с хидродинамика, теория на обективите, теория на вероятностите, теория на числата и др. въпроси на естествознанието. Ойлер първи въвежда понятието функция на комплексна променлива, намира неочаквана връзка между тригонометричните и показателните функции. Тригонометрията дава в този вид, в който я познаваме и днес.

Вариационното смятане в редица трудове на Ойлер приема вид на общ метод. Ойлер е положил началото на аналитичния метод в теорията на числата. На тази теория той посвещава 140 работи. Ойлер е един от създателите на съвременната диференциална геометрия.

Почти във всички области на математиката и нейните приложения се среща името на Ойлер. Няколко дни преди смъртта си Ойлер се занимава с пресмятането на полета на аеростат, който изглеждал чудо в онази епоха, и почти завършва твърде трудно интегриране, свързано с това изчисление. На Ойлер принадлежат повече от 865 изследвания по най-разнообразни въпроси. Той оказва голямо и плодотворно влияние за развитието на математическата просвета в Русия през 18 век.

Питагор, Самоски (ок.580-ок.500 г. пр.н.е.) - древногръцки математик и философ идеалист. Роден е на остров Самос. Получил е добро образование.

Питагор

Питагор от Самос е един от най-влиятелните и, все пак, загадъчни фигури в математиката. Поради това, че не са се запазили никакви свидетелства от първа ръка за живота и делото му, те са забулени с митове и легенди, които затрудняват историците при отделянето на фактите от измислиците. Изглежда сигурно, обаче, че Питагор е развил идеята за числовата логика и е предизвикал първата златна ера на математиката. Благодарение на неговия гений числата вече не били използвани само за броене и смятане, а били ценени и сами по себе си. Той изучава свойствата на специални числа, връзките между тях и фигурите, които те образуват. Той осъзнава, че числата съществуват независимо от сетивния свят и следователно изучаването им е неподвластно на неточностите на възприятието. Това означава, че той може да открива истини, които не зависят от мнения или предразсъдъци и които са по-абсолютни от всяко познато дотогава знание.

Живял през 6 век преди Христа, Питагор придобива математическите си умения по време на пътуванията си по древния свят. Някои предания биха могли да ни накарат да повярваме, че е ходил чак до Индия и Британия, но е по-сигурно да се предположи, че той е натрупал много математически похвати и умения от египтяните и вавилонците. И двата древни народа са излезли извън границите на простото броене и са били способни да извършват сложни пресмятания, което им позволило да създадат сложни бройни системи и да строят забележителни сгради. Фактически те гледали на математиката само като на средство за решаване на практически задачи; мотивация за откриването на някои основни правила на геометрията била нуждата от възстановяване на границите на участъци, които изчезвали след ежегодните наводнения на Нил. Самата дума геометрия означава “измерване на земя”. Питагор забелязал, че египтяните и вавилонците извършват всяко пресмятане във вид на рецепта, която може да се следва сляпо. Рецептите, преминали през много поколения, винаги давали правилен отговор и затова никой не си поставял за цел да ги оспорва или пък да овладее логиката, която се крие в уравненията. За тези цивилизации било важно само, че смятането върви правилно, а защо - този въпрос бил неуместен.

След 20 години пътувания Питагор усвоява всички математически правила на познатия свят. Той “свива платна” в своя роден остров Самос в Егейско море с намерение да основе школа, посветена на изследване на философията и, по-специално, на изследване на донесените неотдавна математически правила. Той иска не само да използва числата, а и да ги разбира. Надява се да намери многобройна подкрепа от свободомислещи ученици, които да му помогнат да развие радикално нови теории. Но през времето на неговото отсъствие тиранът Поликрат превръща някога либералния Самос в нетолерантно общество. Поликрат кани Питагор да се присъедини към неговия двор, но философът съзнава, че това е само трик, за да го накара да замълчи, и затова отказва честта. Той напуска града и се преселва в пещера в отдалечена част на острова, където можел да разсъждава без страх от преследване.

Питагор не харесвал изолацията си и, в крайна сметка, с подкупи привлича едно момче за свой първи ученик, който става негов последовател. Междувременно той основава школа, известна като Полукръжок на Питагор, но схващанията му за социалните преобразования се оказват неприемливи и философът е принуден да напусне колонията заедно с майка си и един от своите последователи.

Питагор отпътува за Южна Италия, която тогава е част от Велика Гърция, и се установява в Кротон, където съдбата му помага да намери покровител в лицето на Милон - най-богатия човек в Кротон и един от най-силните мъже в историята. Милон ценял и изучавал философия и математика. Той отделя част от къщата си и предоставя на Питагор достатъчно място за създаването на школа.

Сигурно в този нов дом Питагор основава Питагорейското братство - екип от 600 последователи, които били в състояние не само да разбират уроците му, но можели да се присъединят към него в създаването на нови идеи и доказателства. При постъпване в братството всеки от последователите е трябвало да дари всичките си притежания на един общ фонд и, ако някой трябвало някога да го напусне, той щял да получи два пъти повече от онова, което е дарил първоначално, като в негова памет щял да бъде поставен надгробен паметник. Братството включвало и няколко сестри. Любима ученичка на Питагор била дъщерята на Милон - красивата Теано, и, независимо от разликата в годините им, те накрая се оженили.

Всеки член на школата бил принуден да се закълне никога да не разкрива на външния свят което и да е от техните открития.

Онова което се знае със сигурност е, че Питагор установява норми, които променят хода на математиката. Фактически Братството било религиозна общност и един от идолите, на които те се кланяли, било числото. С разбиране на връзката между числата те се надявали да разкрият духовните тайни на Вселената и да се приближат до боговете. По-специално, Братството насочило вниманието си към изучаването на бройните числа $(1, 2, ...)$ и дробите. Бройните числа понякога се наричали цели и заедно с дробите (отношения на цели числа) те носят специалното име рационални числа. Измежду безбройно многото числа Братството търсело усърдно онези, които имат някакъв конкретен смисъл, а някои от най-специалните били така наречените "съвършени числа".

Според Питагор числовото съвършенство зависи от делителите на числото. Когато сборът на делителите на числото е по-голям от самото число, то се нарича "препълнено". Например 12 е препълнено число, понеже сумата от делителите му $1+2+3+4+6=16$ (не се включва самото число 12). От друга страна, когато сборът на делителите на числото е по-малък от самото число, то се нарича "непълно". Например числото 10, тъй като сумата от делителите му е $1+2+5=8$.

Най-важните и най-редки са онези числа, сборът от делителите на които е равен точно на самото число - именно това са съвършените числа.

Например съвършено число е 6, тъй като $1+2+3=6$; 28, тъй като $1+2+4+7+14=28$.

Едно от прозренията на Питагор е тясно свързано с “двоичността”. Числата $4,8,16$ и т.н. са познати като степени на 2 и могат да се запишат като 2^n, където n представлява броя на двойките, участващи в произведението, представляващо съответното число. На тези степени на 2 само малко не им достига да са съвършени, понеже сборът на делителите им се оказва с единица по-малък от самото число. Това ги прави леко “непълни”: $2^2=2.2\ =4,\ \ 1+2=3;\ \ 2^3=2.2.2=8,\ \ 1+2+4=7$ и т.н.

Два века по-късно Евклид ще уточни връзката между двоичността и съвършенството. Той открива, че съвършените числа са винаги произведение на две числа, едното от които е степен на 2, а другото е следващата степен на 2 без 1: $6=2^1\times\left(2^2-1\right)$; $28=2^2\ \times\left(2^3-1\right)$; $496=2^4\times\left(2^5-1\right)$ и т.н.

В допълнение към изучаването на зависимостите между числата Питагор силно се интересува и от връзката между числата и природата. Той осъзнава, че природните явления се управляват от закони и че тези закони могат да се описват с математически уравнения. Една от тези първи връзки, която той открива, е основната зависимост между хармонията на музиката и хармонията на числата.

Измежду всички връзки между числата и природата, изучавани от Братството, най-важна е зависимостта, носеща името на нейния откривател - Питагоровата теорема. Важно е обаче да се отбележи, че макар тази теорема да се свързва завинаги с името на Питагор, фактически тя е била известна на китайците и вавилонците хиляди години преди него. На тези цивилизации обаче не било известно, че теоремата е вярна за всеки правоъгълен триъгълник, а само за правоъгълните триъгълници, които те изпробвали. Основание за претенцията на Питагор, че теоремата е негова, е фактът, че той е първият, който доказва универсалната ѝ валидност. Откритието било толкова значимо, че били пожертвани в дар сто вола, като израз на признателност към боговете. (На шега се говори, че оттогава всички говеда мразят математиката).

На Питагор се приписват редица важни за онова време открития: теоремата за сумата на вътрешните ъгли на триъгълника, задачата за разделяне на равнината на правилни многоъгълници (триъгълници, квадрати и правилни шестоъгълници). Има сведения, че Питагор е построил "космически" фигури, т.е. 5 правилни многостена. Но е по-вероятно той да е знаел три най-прости многостена: куб, четиристен, осмостен. Школата на Питагор е направила много, за да придаде на геометрията характера на наука. Основната особеност на метода на Питагор е обединението на геометрията с аритметиката. На него принадлежи геометричният метод за решаването на задачи, които сега се свеждат към квадратни уравнения; геометричното доказателство на това, че сумата на последователни нечетни числа, започвайки от единицата са точни квадрати ($1+3=2^2,\ 1+3+5=3^2$ и т.н.) и че всяко нечетно число е разлика на два последователни квадрата ($2^2-1^2=3,\ 3^2-2^2=5,\ldots$). Питагор много се е занимавал с пропорциите и прогресиите и вероятно с подобието на фигурите, тъй като на него се приписва решението на задачата: "По дадени две фигури да се построи трета, равнолицева с една от дадените и подобна на втората".

Питагор е един от първите, които смятат, че Земята има формата на сфера и е център на Вселената, че Слънцето, Луната и планетите имат собствено движение, различно от денонощното движение на неподвижните звезди. Н. Коперник възприема учението на питагорейците за движението на Земята като предистория на своето хелиоцентрично учение. Не напразно църквата обявява системата на Коперник за "лъжливо питагорейско учение".

Откриването на факта, че между страната и диагонала на квадрата не съществува обща мярка, е най-голямата заслуга на питагорейците. Този факт предизвиква първата криза в математиката. Питагорейското учение за целочислената основа на всичко съществуващо повече не можело да се признава за вярно. За Питагор обаче красотата на математиката се състояла в идеята, че рационалните числа (целите числа и дробите) могат да обяснят природните явления. Тази ръководна философия не позволила на Питагор да приеме съществуването на ирационалните числа. Затова питагорейците се опитват да запазят в тайна това свое откритие. Едно предание разказва, че млад ученик на име Хипас мързеливо си играел с числото $\sqrt{2}$, като се стремял да намери еквивалентната дроб. В крайна сметка той осъзнал, че такава дроб не съществува, т.е., че $\sqrt{2}$ е ирационално число. Хипас трябва да е изпаднал във възторг от откритието си, но учителят му – ни най-малко. Питагор дефинирал Вселената на езика на рационалните числа и съществуването на ирационални числа поставяло под въпрос неговия идеал. Прозрението на Хипас вероятно е било последвано от период на обсъждания и размишления, в хода на които Питагор сигурно е решил, че трябва да приключи с този нов източник на числа. Той обаче не бил склонен да признае, че не е прав, като същевременно не можел да обори доказателството на Хипас със силата на логиката. За негов вечен позор той осъжда Хипас на смърт чрез удавяне. Едва след смъртта на Питагор ирационалните числа могли безопасно да възкръснат.

Доказателството на факта, че $\sqrt{2}$ е ирационално число е дадено от Евклид чрез допускане на противното, който метод Евклид широко използва.

Питагоровото братство придава смисъл на математиката със своето страстно търсене на истината чрез доказателство. Новината за техните успехи се разчува и все пак подробностите на техните открития остават строго пазена тайна. Мнозина молели за достъп до светилището на знания, но били приемани само най-блестящите умове. Един от онези, които не били избрани, бил кандидат на име Силон. Той бил оскърбен от този унизителен отказ и 20 години по-късно извършил своето отмъщение - насъскал и повел тълпа хора да разрушат най-блестящата математическа школа, която светът някога е виждал. Къщата на Милон, в която била школата, била обкръжена, всички врати били залостени и тя била подпалена. Милон успял да избяга, но Питагор заедно с много от последователите си загива.

След смъртта на своя основател Братството напуска Кротон и се пръска в други градове на Велика Гърция. Но преследванията продължават и в края на краищата мнозина от тях трябвало да се установят в чужди страни. Тази принудителна миграция подтиква питагорейците да разпространят своята математическа вяра навсякъде из древния свят. Учениците на Питагор основават нови школи и преподават на учениците си метода на логическото доказателство. Сведения за техните постижения се съдържат по-късно в съчиненията на Платон, Аристотел и др.

Прингсхайм, Алфред (A. Pringsheim) (08.09.1850-25.06.1941) - немски математик. Работил е в Мюнхен. Последовател е на К. Вайерщрас в областта на степенните редове; работи в областта на теория на функциите, в теория на непрекъснатите дроби, теория на редовете на

Фурие и в история на математиката. С неговото име е наречен критерий за сходимост на двойна редица.

Привалов, Иван Иванович (11.02.1891-13.07.1941) - руски математик, доктор на физико-математическите науки, професор (1918), член-кореспондент на АН на СССР (1939). Роден е в Нижен Ломов (сега Пензенска област). Завършва Московския университет (1913). Отначало работи в Саратовския университет, а от 1922 г. - в Москва, в Университета и във Военно-въздушната академия. Основните трудове на Привалов се отнасят до теорията на функциите и интегралните уравнения. Значителна част от резултатите е получена от него съвместно с Н. Н. Лузин. Те са изследвали граничните свойства и граничните задачи на теорията на аналитичните функции, прилагайки методи от теорията на реалните функции. В дисертацията си "Интеграл на Коши" (1918) Привалов обобщава единствеността на така наречената теорема на Лузин-Привалов, доказва своята основна лема за интегралите от типа на Коши и своята теорема за особения интеграл. Привалов полага началото на изследванията по теория на еднолистните функции в СССР. Голяма роля има така наречената задача на Риман - Привалов. Привалов е автор на работи по теория на тригонометричните редове и по теория на субхармоничните функции. Той е публикувал повече от 70 оригинални работи, сред които известни монографии и учебници, такива като "Въвеждане в теорията на функциите на комплексна променлива", "Аналитична геометрия" и др., претърпели много издания.

Пюизо, Виктор Александър (V. A. Puiseux) (16.04.1820-09.09.1883) - френски математик и астроном, член на Парижката АН (1871). Образованието си получава в Нормалното училище. Бил е професор по математика в Безансонския факултет, а след това професор по механика в Парижкия факултет на науките, професор по математика в Сорбоната. През 1850 г. разработва теорията на алгебричните функции и разложенията на многозначните алгебрични функции в редове по дробни степени. Установява понятието цикъл в теорията на аналитичните функции и доказва, че редът на разложение на алгебрична функция е сходящ само към най-близката точка на разклонение или към точката на безкрайното прекъсване на някой изобразяван с ред клон на аналитичната функция. От 1864 г. Пюизо заедно с Ж. Бертран редактира списанието "Научни записки на Висшето нормално училище".

Раабе, Жозеф Людвиг (J. L. Raabe) (15.05.1801-12.01.1859) - швейцарски математик и физик, професор. Работил е в Цюрих във Висшето училище с политехникум. Научните изследвания на Раабе засягат различни области на математиката: анализ, геометрия, приложна математика. В теорията на функциите той дава важни критерии за сходимост, които са наречени с неговото име. Въвежда основните формули на сферичната тригонометрия в пространствени координати с помощта на определен интеграл, получава крайни изрази за полиномите на Бернули и т.н.

Риман, Георг Фридрих Бернхард (G. F. B. Rieman) (17.09.1826-30.07.1866) - немски математик, доктор по математика (1851), професор (1857). Роден е в местността Брезеленец (Долна Саксония). Средното си образование получава в Хановерската и Люнебургската гимназии. В горните класове се увлича от работите на видните математици, в частност от Л. Ойлер и А. Льожандър. От 1846 г. изучава теология в Гьотингенския университет. В Гьотинген Риман слуша лекциите на К. Ф. Гаус. В края на своето пребиваване в Гьотинген той се заинтересува от проблемите на геометрията. От 1847 г. до 1849 г. учи в Берлинския университет, където слуша лекциите на такива видни математици като П. Дирихле, К. Якоби, Я. Щайнер. Между тях и Риман се завързва дружба, продължила много години и безусловно повлияла върху формирането на научните интереси на Риман. През 1849 г. Риман се завръща в Гьотинген и тук се сближава с Г. Вебер. Под негово влияние започва да се интересува от математическото изучаване на природата. Обаче той тръгва по свой път и създава собствена представа за света. Според Риман пространството е изпълнено с непрекъсната материя, на която влияят силата на тежестта, светлината и електричеството. Той навсякъде въвежда понятието за разпространяване на тези процеси във времето, търси връзката между привличането и светлината.

Георг Риман

През 1851 г. Риман защитава докторска дисертация на тема “Основи на общата теория на функциите на една комплексна променлива”. След 3 години той подава в Гьотингенския университет две работи: “За възможността за изобразяване на функции с помощта на тригонометрични редове” и “За хипотезите, лежащи в основата на геометрията”, и е зачислен като приват-доцент. Тези две работи са публикувани от Ю. В. Дедекинд след смъртта на техния автор (1868). През есента на 1857 г. Риман става извънреден професор в Гьотингенския университет, а през 1859 г. след смъртта на П. Дирихле - редовен професор. След смъртта на Риман Дедекинд публикува част от неговите изследвания със свои коментари. Пълно издание на трудовете на Риман е осъществено през 1876 г. В резултат на продължителни и старателни усилия са събрани записките на неговите лекции по математическа физика, теория на привличането, на електричеството и магнетизма, теория на елиптичните функции. Тези записки са публикувани от неговите ученици през 1902 г. като допълнение към пълното издание на трудовете на Риман. Публикувани са също и три тома лекции на Риман: “Частни диференциални уравнения на математическата физика” (1869), “Привличане, електричество, магнетизъм” (1875), “Елиптични функции” (1899).

Научните интереси на Риман са много широки. Той създава и успешно използва нови методи за интегриране на частни диференциални уравнения за решаването на различни физични задачи. С неговото име са наречени различни математически теории и теореми, в частност, теоремата за алгебричните функции (теорема на Риман - Рох). Той въвежда така наречените риманови повърхнини, важни при изследването на многозначните аналитични функции. Изказаната от него хипотеза за разпределението на нулите на цета-функцията се нарича “хипотеза на Риман”. Тя има важно значение за развитието на аналитичната теория на числата. Има матрица на Риман в теорията на абелевите функции, метод на Риман за решаването на хиперболични уравнения, функции на Риман и т.н. Риман въвежда строгото понятие на определен интеграл и доказва неговото съществуване. Работите на учения имат голямо влияние за развитието на математиката през 19 и 20 век. С неговата докторска дисертация “Основи на общата теория на функциите на една комплексна променлива” е положено началото на геометричното направление в развитието на теорията на аналитичните функции и на широкото приложение на идеите и методите на математическата физика, а също така и на новата геометрична наука - топологията.

Особено голямо значение имат разработката на конформните изображения и въвеждането на така наречените риманови повърхнини, важни при изследването на многозначните аналитични функции, което бе отбелязано и по-горе. Във връзка с въпроса за чертането на карти конформните изображения са разглеждани от Л. Ойлер, Ж. Лагранж, К. Гаус дълго преди Риман. Но Риман пръв ясно свързва свойството на функцията $w = f(z)$ на комплексната променлива z да извършва конформно изображение на дефиниционната област с наличието на определена производна на тази функция. Той доказва и основната в теорията на конформните изображения теорема за възможността за конформно изобразяване на кръг в произволна едносвързана област. Такива изображения често се използват в различните приложения на теорията на функциите на комплексна променлива, например в създадената от Н. Е. Жуковски теория за крилото на самолета. По-късно теорията на функциите на комплексна променлива е значително развита въз основа на резултатите на Риман.

В мемоара "За количеството на простите числа, не превишаващо дадена величина" (1859) Риман за първи път разпространява върху комплексната област така наречената цета-функция, установява редица нейни свойства, показва тясната връзка между разпределението на простите числа и някои от тези свойства, което дава възможност на Ж. Адамар и Ла Вале Пусен през 1896 г. да обосноват асимптотическия закон за разпределение на простите числа. Въобще този мемоар изиграва важна роля в развитието на теорията на функциите на комплексна променлива и аналитичната теория на числата.

В лекцията "За хипотезите, лежащи в основата на геометрията" (публикувана през 1868 г.) Риман за първи път след откритието на Н. И. Лобачевски развива математическото учение за пространството, въвежда понятието диференциал на разстоянието между елементите на многообразие и развива учението за кривината. Въвеждането на обобщените риманови пространства, частни случаи на които са пространствата на Евклид и на Лобачевски, и така наречената геометрия на Риман, открива нови пътища в развитието на геометрията. Геометрическите идеи на учения намират приложение и във физиката (теория на относителността). Голямо значение има и апаратът на теорията на квадратичните диференциални форми, разработен от Риман (1861) и неговите ученици, който се използва в теорията на относителността. Важни за развитието на теорията на множествата и теорията на функциите на реална променлива се оказват изследванията на Риман - "За възможността за представяне на функция с помощта на тригонометричен ред".

Сохоцкий, Юлиан Васильевич (05.02.1842-14.12.1927) - руски математик, доктор по математика (1873), професор (1873). Роден е във Варшава. Взима участие в полското въстание. През 1866 г. завършва Петербургския университет. От 1868 г. работи в този университет и в Института по гражданско инженерство.

Основните работи на Сохоцки са посветени на теорията на функциите на комплексна променлива. В магистърската си дисертация той за първи път формулира и доказва теоремата за поведението на аналитичната функция в околността на съществената особената точка (теорема на Сохоцки), а в докторската си дисертация изследва граничните стойности на интегралите от типа на Коши. Тези резултати широко се използват в механиката. Сохоцки е известен също така и с работите си по висша алгебра и теория на числата. Една от формулите е известна като формула на Сохоцки - Племел. Сохоцки е автор на оригинални широкоизвестни курсове: "Висша алгебра" (1882) и "Теория на числата" (1888). През 90-те години Сохоцки е председател на Петербургското математическо дружество.

Тейлор, Брук (B. Taylor) (18.08.1685-29.12.1731) - английски математик и философ, член на Лондонското кралско дружество (1712) и негов научен секретар (1714). Роден е в село Едмонтон на осем мили от Лондон.

Момчето получава прекрасно възпитание - общо (включващо математика), а също така художествено и музикално. Бащата на Тейлор, суров пуритан, често бивал недоволен от поведението на сина си, по негово мнение, недостатъчно съблюдаващ изискванията на религията. Обаче стигало младият музикант да започне да свири и досадата на неговия баща се топяла и мирът се възстановявал. Запазила се е картина, на която е запечатано семейно тържество - 13-годишният Брук получава от ръцете на по-възрастните корона, украсена с емблемата на хармонията.

През 1701 г., когато Тейлор навършва 15 години, той постъпва в Кембриджския университет, в колежа Сент-Джон. Точно по това време Нютон окончателно се разделя с Кембридж, но, разбира се, си остава кумир за младите математици. Към тях се присъединява от самото си появяване в Кембридж и младият Тейлор.

Към 1712 г. в актива на Тейлор се числят два мемоара - "За центъра на колебанията" и "За изкачването на водата между две равнища". Задачата за капилярните сили, разгледана във втората работа, е поставена от самия Тейлор. Лаплас, дал пълната теория на капилярния ефект, смята работата на Тейлор за доста значителна.

Статиите на Тейлор са признати за толкова ценни, че през 1712 г. го избрат за член на Кралското дружество. Ако си спомним, че през тези години председател на дружеството е Нютон, то трябва да заключим, че 27-годишният Тейлор се е ползвал вече с репутацията на сериозен учен.

През 1713 г. се появява работата на Тейлор за колебаещата се струна. Проблемът на струната е най-популярен сред всички акустични проблеми по онова време. Макар известната дискусия за колебанията на струната (Ойлер, Бернули, Даламбер, Лагранж) да придвижва далече математическата страна на задачата, основите, положени от Тейлор, а именно диференциалното уравнение на колебанията на струната (в частни производни), началните и гранични условия - всичко се е запазило и е послужило като първата тухла в сградата на математическата физика. Наистина трябва да се отбележи, че Тейлор представя колебанието на струната като едно колебание, а не като сума от колебания (последното принадлежи на Д. Бернули).

През 1714 г. Тейлор представя на Дружеството своята книга "Метòда на нарастванията права и обратна". Тази книга е главният труд в живота на Тейлор. Не без влиянието на това събитие в същата година го избират за секретар на Дружеството. Това са години на остри схватки между привържениците на Нютон и Лайбниц в прискърбната борба за приоритет в изобретяването на анализа на безкрайно малките. Тейлор, ставайки секретар на Дружеството, е сред първите фигури в този спор.

1715 г. е връх в творческата биография на Тейлор - излиза от печат "Метòда на нарастванията". Книгата е разделена на две части. В първата се излага теорията на крайните разлики и, в частност, се съдържа изводът на знаменития ред на Тейлор. Изведена е и формула за разлагане на интеграла на Й. Бернули. Изводът на Тейлор е по-добър от този на Й. Бернули, но може да се упрекне Тейлор за това, че не е споменал името на първооткривателя Й. Бернули. Последният не бил от тези хора, които равнодушно преминават край малките убождания от такъв род, и през май 1721 г. в "Acta eruditorum" той изказва своето недоволство.

Втората част на "Метòда на нарастванията" съдържа приложение на теорията за решаването на различни задачи.

През 1716 г. Тейлор предприема пътуване до Париж. В Париж го приемат възможно най-добре и той остава много доволен. Вниманието от страна на учените, знаците на уважение, интересните запознанства - всичко това прави на Тейлор много приятно впечатление.

През 1717 г. излизат 4-те последователни работи на Тейлор: ”За численото решаване на уравнения”, “За една задача на Лайбниц”, “За параболичното движение на снаряда” и “За топлинното разширяване на течността в термометъра”. Могат да се споменат още две много успешни книги “За перспективата”, издадени през 1715 и 1719 г. Книгите имат голям успех, независимо от жлъчната критика на Йохан Бернули. Между другото, през 1718 г., Тейлор си отива от поста секретар на Кралското дружество, за да си освободи време за философска работа. Той се връща към увлечението на младостта си - занимава се с музика и живопис. През 1721 г. Тейлор се оженва, което предизвиква разрив с баща му. Щастието, купено на такава скъпа цена, се оказва нетрайно. През 1723 г. той загубва жена си и детето си. През 1725 г. отново се жени - вече при пълното одобрение на баща си. Но щастието и този път не идва при Тейлор - през 1730 г. жена му умира при раждане. Наистина остава момиченцето (нейният син, сър Уилям Юнг, много е направил за осветяване на биографията на дядо му и е издал неговите философски съчинения), но Тейлор бил неутешим в мъката си. Неговото здраве рязко се влошава и повече не се възстановява. На 29 декември 1731 г. той почива и е погребан в Лондон.

Безсмъртният паметник на Тейлор е неговият ред. Името му завинаги ще остане в математиката, защото редът на Тейлор няма да остарее никога. Обаче фундаменталното значение на този принос в математиката не било осъзнато веднага. Пълната разработка на теорията на реда на Тейлор продължава повече от 100 години. След излизането на Лагранжовата “Теория на аналитичните функции” значението на реда на Тейлор вече е разбрано достатъчно дълбоко. Обаче самият ред се разбирал все още чисто формално. Едва през 1797 г. Лагранж дава израз за остатъчния член на реда. Разложението обаче се смятало възможно за всяка функция à priori. Накрая пълна яснота по въпроса внася Коши. През 1823 г. той разглежда сходимостта на реда към дадената функция (в същата работа е даден и остатъчният член във формата на Коши), а през 1829 г. (“Лекции по диференциално смятане”) установява разликата между сходимост на реда въобще и сходимостта му към дадената функция.

Фробениус, Фердинанд Георг (F. G. L. Frobenius), (26.10.1849-03.08.1917) - немски математик, член на Берлинската АН (1893). Роден е в Берлин. Завършва Берлинския университет. Защитавайки дисертация за степен доктор по философия (1874), става професор в Берлинския университет. През 1875-1893 г. работи в Цюрих в Политехникума. През

1893 г. отново се връща в Берлин и работи в университета до края на живота си.

Най-важните научни изследвания на Фробениус се отнасят до алгебрата, теория на алгебричните числа, теория на матриците, теория на крайните групи и тяхното представяне чрез матрици. Занимавайки се с изследване на структурата на алгебра с крайна размерност (едновременно с Ф. Е. Молин, но независимо от него), Фробениус въвежда такива понятия в тази теория като “радикал”, “фактор-алгебра”, “проста, полупроста и съседна алгебри”. Наред с У. Хамилтон той се смята за един от създателите на алгебрата на хиперкомплексните числа. Фробениус и К. Вайерщрас полагат основите на теорията на матриците като алгебрична дисциплина. Фробениус прави съществен принос в теорията на крайните групи на линейните замествания. В теория на групите са известни така наречените “коренови групи” на Фробениус, над които по-късно работи и И. Шур. Фробениус създава теорията на характерите на групите. На него принадлежи и строгото изложение на метода за сумиране със средно аритметичните, широко използван в учението за разходящите редове.

Хамилтон, Уйлям Роуан (W. R. Hamilton), (04.08.1805-02.09.1865) - ирландски математик, член на Ирландската АН, член-кореспондент на Петербургската АН. Роден е в Дъблин. На 3 години Хамилтон вече умее да чете, не лошо знае аритметиката и географията; на 10 години става студент; към 12-годишна възраст той вече знае 12 езика. Сред изучените езици са арабски, персийски, малайски и др. Латинския език той владее в съвършенство. Повод за изучаването на последния послужили “Началàта” на Евклид, които той намира на латински език и прочита, когато е едва на 10 години.

Уйлям Хамилтон

Когато Уйлям Хамилтон навършва 13 години, с голям интерес прочита и усвоява “Всеобща аритметика” на Исак Нютон. В този период от живота си Хамилтон има прекрасна памет, напълно развита логика на съжденията и отлична дарба да смята на ум. Той мигновено правел наум четирите аритметични действия с много големи числа и почти мълниеносно решавал най-сложни аритмитични задачи.

На 22 години става професор по астрономия в Дъблинския университет и директор на университетската астрономическа обсерватория. На 32 години става президент на Ирландската АН и е избран за член-кореспондент на Петербургската АН.

Основните работи на Хамилтон се отнасят до механиката и теорията на диференциалните уравнения (Хамилтон-Остроградски-Якоби уравнение) и функционалния анализ, където важна роля играе операторът на Хамилтон; той открива вариационния принцип в механиката, който е обобщен от М. В. Остроградски. Хамилтон почти едновременно с немския математик Г. Гросман дава точно формално изложение на теорията на комплексните числа като частен случай на числови системи с няколко единици. Той построява система от числа - така наречените квартерниони, с четири единици $1, i, j, k$, свързани помежду си със следната таблица за умножение:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \;\; ij = -ji = k; \;\; jk = -kj = i; \;\; ki = -ik = j .$$

Върху теорията на квартернионите Хамилтон работи 8 години. Неговите идеи са близки с идеите на Гросман, но изложението на Гросман, поради своята яснота, изиграва решаваща роля в признаването не само на квартернионите, но и на комплексните числа. Това учение и по-нататък е един от източниците за развитието на векторния анализ.

През 1853 г. излиза трудът на Хамилтон със заглавие “Лекции за квартернионите”. Интересно е да се отбележи, че операцията умножение на квартернионите, която не му се е отдавала дълго време, той открива неочаквано, когато отива на работа. За това той пише на своя син: “…16 октомври 1843 г., оказал се понеделник и ден на заседание на Ирландската академия, когато аз отивах в Академията, за да председателствам, по крайбрежната улица на Кралския канал, придружен от твоята майка, и, независимо от нашия разговор, моите мисли работеха така ясно в подсъзнанието, че дадоха, най-накрая, резултат, важността на който аз веднага почувствах. Като че ли се затвори електрическа верига и проблесна искра, дойде вестител на много дълги години неотлъчна работа и мисли”.

Хамилтон въвежда термините: вектор, асоциативен закон. Известни са работите му в геометрията (където той се е занимавал с теорията на вълновите повърхнини) и в алгебрата (в теорията на Галоа; една от групите носи името на Хамилтон).

Хамилтон е автор на повече от 140 работи, отнасящи се предимно до оптиката, динамиката и изчисляването на квартернионите.

Хайне, Хенрих Едуард (H. E. Heine), (16.03.1821-21.10.1881) - немски математик. Роден е в Берлин. Учи в Берлин и в Гьотинген, след това работи в университетите в Бон и Хале. Основните трудове на Хайне се отнасят до математическата физика (теория на потенциала), теорията на частните диференциални уравнения и особено до теорията на функциите, където той в частност развива по-нататък теорията на функциите на Ламе, гама-функциите и цилиндричните функции; терминът "цилиндрична функция" е предложен от Хайне. Една от теоремите в теорията на функциите, утвърждаваща, че "Всяка числова функция, която е непрекъсната в ограничен затворен интервал, е равномерно непрекъсната в него", носи името теорема на Хайне-Борел. Редица работи на Хайне са посветени на проблема за единствеността на тригонометричните редове.

Списък на математиците според годината на тяхното раждане

1.	Питагор, С.	(ок. 580 – ок. 500 г. пр. н.е.)
2.	Архимед	(ок. 287 – 212 г. пр. н. е.)
3.	Кардано, Дж.	(24.09.1501 - 21.09.1576)
4.	Бомбели, Р.	(ок. 1526 – 1572)
5.	Непер, Дж.	(1550 – 4.04.1617)
6.	Декарт Р.	(31.03.1596 – 12.02.1650)
7.	Валис (Уолис), Дж.	(23.11.1616 – 28.10.1703)
8.	Нютон, И.	(04.01.1643 – 31.03.1727)
9.	Лайбниц, Г. В.	(01.07.1646 – 14.11.1716)
10.	Бернули, Якоб I	(27.12.1654 – 16.08.1705)
11.	Лопитал, Г. Фр.	(1661 – 2.02.1704)
12.	Моавър, А.	(26.05.1667 – 27.11.1754)
13.	Бернули, Йохан I	(27.07.1667 – 01.01.1748)
14.	Тейлор, Б.	(18.08.1685 – 29.12.1731)
15.	Бернули, Николай I	(10.10.1687 – 29.11.1759)
16.	Бернули, Николай II	(27.01.1695 – 09.08.1726)
17.	Бернули, Данаил	(08.02.1700 – 17.03.1782)
18.	Ойлер, Л.	(15.04.1707 – 18.09.1783)
19.	Бернули, Йохан II	(1710 – 1790)
20.	Даламбер, Ж. Л.	(16.11.1717 – 29.10.1783)
21.	Бернули, Йохан III	(1744 – 1807)
22.	Весел, К.	(08.06.1745 – 25.03.1818)
23.	Лаплас, П. С.	(23.03.1749 – 05.03.1827)
24.	Бернули, Якоб II	(1759 – 1789)
25.	Арган, Ж. Р.	(18.07.1768 – 13.08.1822)
26.	Гаус, К. Фр.	(30.04.1777 – 23.02.1855)
27.	Поасон, С. Д.	(21.06.1781-25.04.1840)
28.	Болцано, Б.	(05.10.1781 – 18.12.1848)
29.	Бесел, Фр. В.	(22.07.1784 – 17.03.1846)
30.	Френел, А. Дж.	(10.05.1788-14.07.1827)
31.	Коши, О. Л.	(21.08.1789 – 23.05.1857)
32.	Грийн, Дж.	(14.07.1793 – 31.03.1841)
33.	Дюамел, Ж. М. К.	(05.02.1797 – 29.04.1872)
34.	Раабе, Ж. Л.	(15.05.1801 – 12.01.1859)
35.	Абел, Н. Х.	(05.08.1802 – 06.04.1829)
36.	Дирихле, П. Г. Л.	(13.02.1805 – 05.05.1859)
37.	Хамилтон, У. Р.	(04.08.1805 – 02.09.1865)

38. Лиувил, Ж.	(24.03.1809 – 08.09.1882)
39. Лоран, П. А.	(1813 – 1854)
40. Вайерщрас, К. Т. В.	(31.10.1815 – 19.02.1897)
41. Пюизо, В. Ал.	(16.04.1820 – 9.09.1883)
42. Хайне, Х. Е.	(16.03.1821 – 21.10.1881)
43. Кели, А.	(16.08.1821 – 26.01.1895)
44. Риман, Г. Фр.	(17.09.1826 – 30.07.1866)
45. Казорати, Ф.	(17.12.1835 – 11.09.1890)
46. Жордан, К. М. Е.	(05.01.1838 – 21.01.1922)
47. Мертенс, Ф.	(1840-1927)
48. Сохоцки, Ю. В.	(05.02.1842 – 14.12.1927)
49. Дарбу, Ж. Г.	(13.08.1842 – 23.02.1917)
50. Кантор, Г.	(03.03.1845 – 06.01.1918)
51. Фробениус, Ф. Г.	(26.10.1849 – 03.08.1917)
52. Прингсхайм, А.	(08.09.1850 – 25.06.1941)
53. Морера, Дж.	(16.07.1856 – 08.02.1909)
54. Гурсá, Е.	(21.05.1858 – 25.11.1936)
55. Адамар, Ж.	(08.12.1865 – 17.10.1963)
56. Витали, Д.	(26.08.1875 - 29.02.1932)
57. Лузин, Н. Н.	(09.12.1883 – 28.02.1950)
58. Привалов, И. И.	(11.02.1891 – 13.07.1941)

Литература

1. Аргирова Т., Генчев Т., Дробно-линейната функция, София, 1965;
2. Аргирова Т., Генчев Т., Сборник от задачи по теория на аналитичните функции, София, 1968;
3. Бородин А. И., Бугай А. С., Биографический словарь деятелей в области математики, Киев, 1979;
4. Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефименко В. А., Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Коган С. М., Лунц Г. Л., Поршнева Е. Ф., Поспелов А. С., Фролов С. В., Шостак Р. Я., Янпольский А. Р., Сборник задач по математике для ВТУЗОВ, Москва, 1981;
5. Брадистилов Г., Висша математика III част, София, 1965;
6. Бояджиев Л., Каменов О., Висша математика 4, Ciela, 1999;
7. Волковский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теории функций комплексного переменного, Москва, 1970;
8. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О., Сборник по высшей математике, Ленинград 1949 Москва;
9. Димова-Нанчева В., Витанов А., Каранджулов Г., Михов И., Попов В., Тодорова Ст., Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика V част, София, 1972;
10. Димова В., Витанов А., Караджов Г., Михов И., Попов В., Токаров Д., Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика I част, София, 1965;
11. Евграфов М. А., Аналитические функции, Москва, 1968;
12. Евграфов М. А., Бежанов К. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Сборник задач по теории аналитических функций, Москва, 1972;
13. Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А., Специальный курс высшей математики для ВТУЗОВ, Москва, 1970;
14. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Москва, 1963;
15. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И., Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости, Москва, 1971;
16. Кручкович Г. И., Мордасова Г. М., Подольский В. А., Римский-Корсаков Б. С., Сулейманова Х. Р., Чегис И. А., Сборник задач и

упражнений по специальным главам высшей математики, Москва, 1970;
17. Маркушевич А.И., Теория аналитических функций I и II том, Москва, 1967;
18. Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, Москва, 1966;
19. Минорский В.П., Сборник задач по высшей математике, Москва, 1967;
20. Маринов М. С., Висша математика. Аналитически функции, редове на Фурие, интегрални трансформации, Ciela, 1999;
21. Манолов С., Генов А., Шополов Н., Висша математика IV част, София, 1974;
22. Петрова-Денева А., Димова-Нанчева В., Милушева С., Йоакимов С., Генев В., Сборник от задачи по висша математика IV част, София, 1979;
23. Петрова А., Бояджиев Г., Димова В., Кожухаров И., Сборник от задачи по висша математика, София, 1966;
24. Пчелин Б. К., Специальные разделы вышей математики, Москва, 1973;
25. Романовский П. И., Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа, Москва, 1973;
26. Синг Саймън, Последната теорема на Ферма. Една загадка на 358 години, София, 1999;
27. Топенчаров В., Стоянов Н., Илиев М., Стоева К., Чалъков В., Сборник от задачи по висша математика I част, София, 1979;
28. Фадеев Д. К., Соминский И. С., Алгебра, Москва, 1966;
29. Фадеев Д. К., Соминский И. С., Сборник задач по высшей алгебре, Москва, 1961;
30. Фрейман Л. С., Творцы высшей математики, Москва, 1968;
31. Хапланов М. Г., Теория функций комплексного переменного, Москва, 1965;
32. Чистяков В. Д., Рассказы о математиках, Минск, 1966;
33. Чакалов Л., Увод в теорията на аналитичните функции, София, 1972;
34. Чудесенко В. Ф., Сборник заданий по специальным курсам высшей математики, Москва, 1983;
35. Шахно К. У., Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления, Ленинград, 1961.